

Иво ЙОРДАНОВ ДАМЯНОВ

СИЛНО СЪЩЕСТВЕНИ ПРОМЕНЛИВИ ЗА
ДИСКРЕТНИ ФУНКЦИИ, ТЕРМОВЕ И
СЕМАНТИЧНИ ДЪРВЕТА

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователна и научна степен
“ДОКТОР”

в област 4. Природни науки, математика и информатика,
направление 4.6 Информатика и компютърни науки

Научен ръководител: доц.д-р Йордан Дечев Денев

Благоевград, 2012 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на заседание на катедра “Информатика” при Природо-математически факултет на Югозападен университет “Неофит Рилски”

Дисертационният труд “Силно съществени променливи за дискретни функции, термове и семантични дървета” е с общ обем от 133 страници. Използваната литература включва 67 източника. Списъкът на авторските публикации се състои от 9 заглавия, четири от които в съавторство.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 29.10.2012 година от часа в зала на Югозападен университет “Неофит Рилски”.

Материалите по защитата са на разположение в секретариата на катедра “Информатика”, УК-1, стая 461, всеки работен ден от 08:00 до 17:00 часа.

Съдържание

Увод	4
Глава 1. Структурни свойства на дискретните функции .	9
Глава 2. Квази- силно съществени променливи и квази-отделими множества	16
Глава 3. Диаграми за двоично решаване и силно съществени променливи на функциите	23
Глава 4. Силно съществени променливи и отделими множества в универсални алгебри	27
Глава 5. Съществени входи за автомати работещи върху дървета	34
Заклучение	40
Авторска справка	40
Публикации по темата на дисертацията	42
Благодарности	43
Библиография	45

Увод

През 1847 година George Boole публикува своя труд *“The Mathematical Analysis of Logic”*, с който определя логиката, като дисциплина от математиката, разрушавайки съществуващото от хилядолетия схващане, че тя е философска дисциплина. Седем години по-късно, с публикуването на *“An Investigation of the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities”*, G. Boole полага основите на алгебрата на логиката, която днес носи неговото име. Тласък в приложението на теорията на булевите функции при разработване на превключвателни вериги и функционални схеми дават резултатите, получени от Claude Shannon (*“The Synthesis of two-terminal switching circuits”* (1949)). Формулиран е проблемът за алгоритмичната сложност при анализ и синтез на минимални схеми. Получените първоначални оценки на сложността на реализация от C. Shannon впоследствие са многократно прецизирани от С.В. Яблонский, О.Б. Лупанов, Й. Денев и др.

През 1962 година О.Б. Лупанов, а впоследствие и редица други автори, като Н. Соловьев (1963), А. Salomaa (1963), R.O. Davies (1966), Ю. Брейтбарт (1967), К. Чимев (1967), Й. Денев, Ил. Гюдженов (1983), Сл. Щраков (1984), Ив. Мирчев (1988) и др., започват изучаването на взаимната връзка между променливите и множествата от променливи на дискретните функции. В резултат от изследванията са въведени понятия, като *съществени* и *силно-съществени променливи, отделими, свободни, дистрибутивни, елиминиращи и доминиращи множества от променливи* за функциите. През последните години нови важни резултати във връзка със структурните свойства на дискретните функции са публикувани от М. Couceiro и Е. Lehtonen (2007, 2010), J. Koppitz и Сл. Щраков (2008, 2010), Д. Ковачев (2006, 2008) и др.

Въпреки, че при определени условия се проявяват някои инвариантни свойства за функциите, по отношение на силно съществени, променливи и отделимите, доминиращите, дистрибутивните, елиминиращите и свободните множества от променливи, чрез тях

не се оформят функционално затворени класове. Тази особеност затруднява в най-голяма степен извличането на нови свойства по традиционните (най-вече алгебрични) методи на изследване.

Един от най-силните резултати, касаещ структурните свойства на дискретните функции, е получен през 1970 г. от К. Чимев, а именно, че всяка k -значна дискретна функция, зависеща съществено от поне две променливи, има поне две силно съществени променливи. През последните години бяха въведени понятията съществени променливи и отделими множества от променливи в универсални алгебри, както и съществени входове и отделими множества от входове за автомати, работещи с дървета. *Естествено възниква въпросът за валидността на теоремата за минималния брой силно съществени променливи за термове и семантични дървета.*

От друга страна, съществуват различни концепции за представяне на дискретни функции. Диаграмите за двоично решаване, като редуциран вариант на двоичните дървета за решаване, са във фокуса на изследване на математици от различни страни повече от половин век. Въпреки това, до момента не е разглеждана връзката между структурата на диаграмите за двоично решаване и свойствата на функциите като силно съществени променливи или отделими и дистрибутивни множества от променливи.

Настоящата дисертационна работа частично запълва тази празнота, като в нея се показва, че основният резултат на К. Чимев има универсален характер, т.е. остава в сила за най-разнообразни информационни структури и модели - дискретни функции, автомати работещи с дървета, термове в универсални алгебри, семантични дървета, квазиструктури и др.

Във фокуса на настоящата дисертация са крайнозначните дискретни функции (най-вече булевите), термовете и семантичните дървета.

Основната цел е:

— изучаване и изследване на свойствата на силно-съществените променливи и отделимите множества от променливи за дискретни функции, термове и семантични дървета.

За реализация на тази цел е необходимо да се решат следните задачи:

- Да се изучат постигнатите резултати относно структурните свойства на крайнозначните дискретни функции, като се допълнят някои от тях, с факти получени чрез теоретични изследвания и с използването на компютър.
- Да се изследват структурните свойства на булевите функции при прилагане на различни декомпозиционни схеми.
- Да се анализира връзката между множествата от променливи за булевите функции и конструктивните особености на диаграмите за двоично решаване (ДДР).
- Да се изследват силно-съществените променливи за термове по отношение на алгебри и многообразия.
- Да се изследват силно-съществените входове за автомати работещи върху семантични дървета.
- Да се разработи и реализира програмно осигуряване на изследванията, свързани със съществените променливи на дискретни функции.

Основната част от съдържанието на дисертационния труд е разделено в пет глави, като на решаването на всяка една от първите пет задачи е отделена по една глава, а шестата задача при съства във всяка една от първите три глави.

В **Глава 1** са дефинирани базови понятия и са въведени означения, които са използвани в дисертацията. Резюмирани са резултати, получени от различни автори, по отношение на структурните свойства на дискретните функции, относно техните съществени променливи. Представени са самостоятелно получени резултати, обобщени в Таблица 1, Таблица 2 и Таблица 3, касаещи броя на функциите с определен брой силно съществени променливи, както и каталог на графите на дискретните функции, по отношение на отделимите двойки променливи.

Тези резултати са получени с помощта на разработени алгоритми, реализирани като компютърни програми и са публикувани в

[Su-Da;2011] Sukalinska, M., I. Damyanov, *Class Library for Boolean Function Manipulation*, Proceedings of Forth International Scientific Conference FMNS-2011, Blagoevgrad, 2011

[Da;2012] Damyanov, I., *Graphs, Satisfying Certain Conditions*, Proceedings of IV Balkan Scientific Conference The Science, the Education and the Art in 21st Century, Blagoevgrad, 2012

В Глава 2 се разглеждат свойствата на квазисъществените променливи и квазиотделимите множества от променливи за булевите функции. Въведени са основните понятия квазисъществена, квазификтивна, квази- силно съществена променлива, както и квазиотделимо множество от променливи (Определения 16; 18; 20 и 21). Доказани са основни твърдения (Лема 5; Теорема 7; Лема 8), с чиято помощ са изведени и доказани основните резултати, касаещи минималния брой квази- силно съществени променливи (Теорема 6; 9; 10 и 11) както и някои допълнителни твърдения (Теорема 12, 13 и 14). Резултатите от тази глава са публикувани в

[Da;2001] Damyanov, I., *On Some Properties of Variables in Reed-Muller Decompositions*, Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of 30th Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovets, 2001.

[Da;2011] Damyanov, I., *On Some Properties of Quasi-Essential Variables of the Boolean Functions*, Proceedings of Forth International Scientific Conference FMNS-2011, Blagoevgrad, 2011

В Глава 3 се изследва връзката между свойствата на променливите на булевите функции и структурата на диаграмите за

двоично решаване. Показано е, че ако конструирането на наредена диаграма за двоично решаване започне с променлива, която се явява дистрибутор, то диаграмата е с минимална сложност.

Основните резултати са публикувани в

[Da;2011] Damyanov,I., *On Some Properties of Boolean Functions and Their Binary Decision Diagrams*, Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of 40th Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovets, 2011.

В Глава 4 се разглеждат свойствата на силно съществените променливи и отделими множества от променливи за термове по отношение на универсалните алгебри. Основният резултат в тази глава е Теорема 26 и произтичащото от нея Следствие 26.1. Тук е доказано, че ако един терм има поне две съществени променливи, относно някоя нетривиална алгебра $\underline{A}$, то той има и поне две силно съществени променливи относно алгебрата $\underline{A}$, с което е направено едно обобщение на основния резултат на К.Чимев.

В Глава 5 се разглеждат свойствата на съществените входове и отделими множества от входове за автомати, работещи върху семантични дървета. Основният резултат в тази глава е Теорема 27 и произтичащите от нея следствия. Тук освен, че при някои допълнителни условия е доказана валидността за двата силно съществени входа е показано, че са в сила и някои фундаментални резултати за отделими множества.

Основните резултати от тази глава са публикувани в

[Da-Sh;2002] Damyanov,I., Sl.Shtrakov, *Essential Inputs and Minimal Tree Automata*, Proceedings of Sixth International Conference on Discrete Mathematics and Applications, Blagoevgrad, 2002.

Авторефератът на дисертационния труд следва собствена номерация за определения, твърдения, примери, таблици и фигури. Съответстващата номерация от пълния текст на дисертационния труд е посочена в скоби.

Глава 1. Структурни свойства на дискретните функции

В тази глава са въведени някои основни понятия и означения, които ще бъдат използвани в следващите глави. В допълнение са посочени някои оценки за брой функции и графи с определени свойства получени с компютър от автора.

Ще следваме стандартната нотация в математиката за означаване на операции над множества. В изложението ще разглеждаме само тотални функции. По-голяма част от използваните дефиниции и означения са заимствани основно от работите на К. Чимев, Й. Денев, Сл. Щраков, Кр. Манев и др.

Определение 1 (1). [Man;2005] Нека A е крайно множество с k елемента, като без ограничение на общността ще считаме $A = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Всяка функция $f : A^n \rightarrow A$, където n е цяло число, $n \geq 1$, ще наричаме *дискретна* (или *k-значна*) функция.

Когато промяната на стойността на една променлива оказва влияние върху стойността на функцията, ние не може да подминем такива променливи при изучаване на функциите. Естествено е такива променливи да наричаме съществени за съответната функция.

Определение 2 (2). Ще казваме, че функцията $f(x_1, x_2, \dots, x_n), f : A^n \rightarrow A$ зависи съществено от x_i , (x_i е съществена за f) $1 \leq i \leq n$, ако съществуват две n -торки $(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n)$ и $(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$ такива, че $f(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Когато една променлива не е съществена за функцията, ще я наричаме *фиктивна*. Множеството от всички съществени променливи за една функция f ще означаваме с $Ess(f)$, а множеството от фиктивните ѝ променливи с $Fic(f)$.

Под *порядък* на една функция ще разбираме броя на същественият ѝ променливи, т.е. $|Ess(f)|$. С $F^k(n)$ ще означаваме множеството на всички функции $f : A^n \rightarrow A$, а с $F^k = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^k(n)$, където $|A| = k$.

Определение 3 (3). [Man;2005] Нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^k(n)$ и $g_i(y_1, y_2, \dots, y_m) \in F^k(m)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Функцията

$h(y_1, y_2, \dots, y_m) = f(g_1(y_1, \dots, y_m), g_2(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$
наричаме *суперпозиция* на $g_1, g_2, \dots, g_n$ в f .

Повечето от резултатите в настоящата дисертация се отнасят за функции от множеството F^k .

При суперпозицията на константи $c_{i_1}, \dots, c_{i_m}$ на мястото на променливи $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ (или казано още “при заместване на променливи с константи”), за някоя функция f , ще отбелязваме с $f(x_{i_1} = c_{i_1}, \dots, x_{i_m} = c_{i_m})$.

Отъждествяването на променливи ще означаваме с $f(x_i \leftarrow x_j)$, като тази нова функция се получава от $f(x_1, \dots, x_n)$ след суперпозиция на променливата x_i с променливата x_j .

Ако $f \in F^k(n)$ е функция на n независими променливи с $var(f) = Ess(f) \cup Fic(f)$ ще означаваме множеството от тези променливи. Функция от вида $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ ще наричаме *идентитет* или просто *променлива*.

Определение 4 (4). Нека за функцията $f \in F^k(n)$ $var(f) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $M = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\} \subseteq var(f)$. Освен това, нека $C_M = (c_{i_1}, \dots, c_{i_m}) \in A^m$ е една наредена m -торка от константи за променливите от M . Чрез M и C_M се дефинира една нова функция $f_1 : A^{n-m} \rightarrow A$, получена като се заместят променливите от M със съответните стойности от C_M в f . Новополучената функция f_1 се нарича *подфункция на f относно M и C_M* и ще означаваме това с $f_1 \prec^{M, C_M} f$. Когато множествата M и C_M се подразбират ще пишем само $f_1 \prec f$.

Определение 5 (5). Нека $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Под *булева (двоична) функция* на n независими променливи $x_1, x_2, \dots, x_n$ ще разбираме всяка функция $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$.

Определение 6 (8). [Wa-Mc-So;2001] За променливата x_i на булевата функция $f \in F(n)$, казваме че е *0-едностранна променлива (0-single-faced)*, ако функцията f може да се представи като $f = \dot{x}_i f_{\dot{x}_i}$, където с $\dot{x}_i$ сме означили или x_i , или $\bar{x}_i$. Аналогично може да се дефинира и *1-едностранна променлива (1-single-faced)*, а

именно ако функцията f може да се представи като $f = \dot{x}_i + \overline{x}_i \overline{f_{\overline{x}_i}}$.

Определение 7 (10). Под *граф* ще разбираме наредената двойка $G = (V, E)$, където V е множество от елементи, наречени върхове, а $E \subseteq V \times V$. Когато елементите на E са ненаредени двойки, графът е *неориентиран*, а елементите на E ще наричаме *ребра*. Когато двойките от множеството E са наредени, елементите му ще наричаме *дъги*, а графът G — *ориентиран*.

Определение 8 (11). Нека $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ са два графа. Ще казваме, че графите G_1 и G_2 са *изоморфни* и ще пишем $G_1 \cong G_2$, ако съществува *изоморфизъм* от единия граф в другия, т.е. съществува двойка биективни (взаимно-еднозначни) изображения (θ, ϕ)

$$\theta : V_1 \rightarrow V_2 \quad \text{и} \quad \phi : E_1 \rightarrow E_2,$$

такива, че за всеки елемент $e = \{v, w\}$ от E_1 получаваме елемент $\phi(e)$ от E_2 такъв, че $\phi(e) = \{\theta(v), \theta(w)\}$.

Последователността от върхове $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_s}$ за даден неориентиран (ориентиран) граф G ще наричаме *път*, ако $\forall j = 0, 1, \dots, s - 1$ съществува ребро (дъга) $(v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$, което (която) свързва съседните върхове в тази последователност. *Цикъл* е път, за който началният и крайният връх съвпадат. Графите, за които между всеки два различна върха има път, който ги свързва, се наричат *свързани*. *Дърво* е ориентиран граф без цикли, за който: съществува връх, към който не сочи нито една дъга, този връх се нарича *корен*; към всеки друг връх на дървото сочи точно една дъга; съществува единствен път от корена до всеки връх на дървото.

Върховете, от които не излизат дъги се наричат *терминални върхове* (или *листа*), а всички останали *нетерминални*. Дървета, за които от всеки връх излизат най-много две ребра се наричат *двоични*.

Естествената идея за съществена променлива е доразвита в следващата дефиниция, в посока влиянието ѝ върху съществеността на останалите променливи на функцията.

Определение 9 (14). [Ch;1986] Нека $f(x_1, \dots, x_n)$ е функция от порядък $n \geq 2$ и нека M е произволно подмножество от съществ-

вени за функцията f променливи ($M \subset \text{Ess}(f)$, $M \neq \emptyset$). Тогава променливата $x_i \in M$ ще наричаме *силно съществена променлива за f относно множеството M* , ако съществува такава нейна стойност c_i , че функцията $f(x_i = c_i)$ да зависи съществено от всяка променлива, която принадлежи на множеството $M \setminus \{x_i\}$.

За функцията $f \in F(n)$ и $M \subset \text{Ess}(f)$, $M \neq \emptyset$, множеството от всички нейни силно съществени променливи относно множеството M , ще означаваме с $\text{Ess}^*(f, M)$.

Определение 10 (15). [Ch;1986] Ще казваме, че променливата $x_i \in \text{Ess}(f)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$ е *силно съществена за функцията $f(x_1, \dots, x_n) \in F(n)$* , ако x_i е силно съществена за f относно множеството $\text{Ess}(f)$.

Множеството от всички силно съществени за функцията f променливи ще означаваме с $\text{Ess}^*(f)$.

Определение 11 (16). [Ch;1982] Нека M и N са две непразни множества от съществени променливи за функцията f така, че $M \cap N = \emptyset$. Ще казваме, че множеството M е:

- *отделимо за f , относно N* , ако съществува вектор от константи C_N , така че след като заместим с тях променливите в N , получената подфункция g на f ($g \prec^{N, C_N} f$) зависи съществено от всички променливи на M , т.е. $M \subset \text{Ess}(g)$. Със $\text{Sep}(f, N)$ ще означаваме множеството от всички отделими множества за функцията f относно N .

- *отделимо за f* , ако M е отделимо за f относно множеството $\text{Ess}(f) \setminus M$.

С други думи, едно множество M е отделимо за f , ако съществува подфункция g на f , такава че $M = \text{Ess}(g)$.

Със $\text{Sep}(f)$ ще означаваме множеството от всички отделими множества за функцията f . Със $\text{Sep}(f, m, x_i)$ ще означаваме всички отделими множества за f от точно m променливи, които съдържат и променливата x_i .

Въпросите за минималния брой силно съществени променливи на функции, под една или друга форма е разглеждан от различни

автори. Получената оценка от К.Чимев за дискретни функции е пряко следствие от следващата теорема.

Теорема 1 (1). [Ch;1982] Ако $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е функция от порядък n , $n \geq 2$ и M_1 е отделимо за f относно M_2 ($M_2 \neq \emptyset$), то поне една променлива от M_2 е силно съществена за f относно $M_1 \cup M_2$.

Теорема 2 (2). [Ch;1970] Ако f е функция, за която $|Ess(f)| \geq 2$, то съществуват поне две силно съществени променливи за f .

Това твърдение не може да бъде усилено.

Изучаването на спектъра от валидност на теоремата за минималния брой силно съществени променливи в различни структури – функции, термове, дървета, автомати и др., е една от основните цели на настоящата дисертация.

Към момента не съществуват резултати, относно оценка броя на функциите с точно определен брой силно съществени променливи. С помощта на библиотеката за манипулиране на булеви функции – BCL [Su-Da;2011] (<http://dispatcher.swu.bg/BCL/>), е изчислен броят на булевите функции с определен брой силно съществени променливи за функции на 3, 4 и 5 променливи, посочен в Таблица 1.

брой с.с.	5	4	3	2
функции на 3 пр.	-	-	194	24
функции на 4 пр.	-	62098	2112	384
функции на 5 пр.	4291776072	2618920	226560	20480

Таблица 1. (1.3) Брой на булевите функции с определен брой силно съществени променливи

Понятието за съществена променлива е фундаментално и за изучаването на дискретните функции в друга посока, а именно съвместното влияние на едни множества от променливи върху съществеността на други множества от променливи за функцията.

Определение 12 (17). [Sh;1987] Нека M и N са две непразни множества от съществени променливи за функцията f така, че $M \cap N = \emptyset$.

Ще казваме, че множеството M е: *дистрибутивно* (*дистрибутор*) на N за f , ако за всеки вектор C_M от константи, след заместването на променливите от M с тях, получените подфункции g на f ($g \prec^{N, C_M} f$) не зависят съществено поне от една променлива на N , т.е. $N \not\subseteq \text{Ess}(g)$ и множеството M е минимално (относно включването) с това свойство.

С $\text{Ann}(N, f)$ ще означаваме множеството от всички дистрибутивни множества на N за f .

Отделимите двойки от променливи на дадена функция могат да се интерпретират успешно с един неориентиран граф, на който те са ребра.

Определение 13 (18). [Ch;1984] *Граф на функцията $f(x_1, \dots, x_n)$ относно отделимите ѝ двойки от променливи*, е неориентиран граф с върхове същественияте променливи на функцията f и ребра отделимите двойки от променливи.

В редица публикации и монографии К.Чимев извежда необходимите условия един граф да бъде граф на дискретна функция по отношение на отделимите ѝ двойки от променливи. Въпреки продължаващите и до момента търсения, достатъчни условия все още не са формулирани.

Търсенето на достатъчни основания един граф да бъде обявен за граф на дискретна функция е част от изследванията в настоящата дисертационна работа.

Тъй като при малък брой променливи само част от необходимите условия реално “отсяват” графите, от една страна, и от друга предположението, че достатъчното условие може да е “прикрито” от необходимите условия, ни мотивира да продължим пълното описание на графите на дискретните функции зависещи от 7 и повече променливи. Продължавайки изследванията в тази посока, са разработени алгоритми, с които са генерирани графи, удовлетворяващи необходимите условия със 7 и 8 върха. Преразгледани

са получените резултати за графи с 6 върха. Получените резултати са обобщени в следващите таблици, като посочените в скоби числа са за графите, удовлетворяващи необходимите условия, но не за всички са посочени конкретни функции, които им съответстват:

брой променливи	1	2	3	4	5	6	7	8
брой на графите	1	1	2	5	12	(43)	(204)	(1567)

Таблица 2. (1.5) Брой на графите, удовлетворяващи необходимите условия да бъдат графи на дискретни функции, по отношение на отделните им двойки от променливи

За $n = 2, 3, 4, 5$ и 6 К.Чимев в [Ch;1984] е показал с примери, че съществуват функции, които имат такива графи. През 1983 г. Ил. Гюдженев в [G;1983] публикува 50 графа на булеви функции притежаващи променливи с порядък 1 и 2.

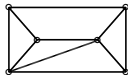
бр. върхове	брой графи, притежаващи върхове свързани с най-много k ребра						
	1	2	3	4	5	6	7
2	1						
3	1	1					
4	2	2	1				
5	4	5	2	1			
6	11	15	12 (13)	3	1		
7	(34)	(72)	(69)	(25)	(3)	1	
8	(156)	(443)	(607)	(315)	(41)	(4)	1

Таблица 3. (1.6) Брой на графите, явяващи се графи на дискретни функции и разпределението им по отношение на върхове с минимален порядък

От Таблица 3 се вижда, че поради малките стойности на n ,

трудно може да се посочи някаква зависимост относно броя на графите, притежаващи връх с определен минимален порядък.

При преразглеждане на известните до момента графи на функции на 6 променливи, са получени още два графа, като единият е отхвърлен като граф на функция.



Фиг. 1. (1.2b) Кандидат-граф с 6 върха, удовлетворяващ необходимите условия

Въпреки опитите да отхвърлим или потвърдим чрез пример остава отворен въпросът дали съществува дискретна функция, на която графът ѝ е изоморфен на посочения на Фиг. 1.

Глава 2. Квази- силно съществени променливи и квазиотделими множества

Подфункциите са тясно свързани с отделимите множества от променливи на функциите. Понятието подфункция позволява да бъде въведено следното обобщено понятие за декомпозиция, направено от В. Becker, и R.Drechsler.

Определение 14 (19). [Вес-Dre;1995] Ще наричаме *декомпозиция* всяка триаргументна функция $\Phi \in F(3)$, такава че за всяко $n \in \mathbb{N}$, за всяка функция $f \in F(n)$ и за всяка променлива $x_i \in \text{Ess}(f)$ съществуват единствени функции $g \in F(n-1)$ и $h \in F(n-1)$, за които $f = \Phi(x_i, g, h)$ и $x_i \notin (\text{Ess}(g) \cup \text{Ess}(h))$, като $(\text{Ess}(g) \cup \text{Ess}(h)) \subset \text{Ess}(f)$.

Й.Денев нарича декомпозициите за булевите функции *универсални функции*. Универсалната функция съпоставя еднозначно на всяка наредена двойка булеви функции на едни и същи $n-1$ променливи, определена функция на n променливи. Тъй като броят на наредените двойки от булеви функции на $n-1$ променливи

съвпада с броя на булевите функции на n променливи, то това съпоставяне е еднозначно и обратимо.

Теорема 3 (12). [De;1978] Универсални са функциите:

$f = xg \oplus h$ позитивна Рийд-Мюлерова декомпозиция

$f = x(g \oplus h) \oplus h = xg + \bar{x}h$ Шенонова декомпозиция

$f = xg \oplus g \oplus h = \bar{x}g \oplus h$ негативна Рийд-Мюлерова декомпозиция

и всички функции, които се получават от горните, чрез разменяне и инвертиране на аргументите g и h . Други универсални функции няма.

Така стигаме до едно обобщение на понятието подфункция.

Определение 15 (20). [De;1978] За булевата функция $f = \Phi(x_i, g, h)$, функциите g и h ще наричаме Φ -подфункции, като с Φ ще означаваме използваната универсална функция.

Дефинициите за фиктивни и съществени променливи, силно съществени променливи и отделими множества от променливи, първоначално са въведени като са използвани свойствата на шеноновите подфункции, впоследствие са доразвити за k -значните дискретни функции. В основата им обаче са свойствата на различните декомпозиции и съответните им универсални функции. През 2001 г., като използвах друга универсална функция, а не Шенонова декомпозиция, ми се удаде да дефинирам квазификтивни променливи и квазиотделими множества от променливи. Аналогично, съществени входове и отделими множества от входове за автомати, работещи с дървета, са въведени от Сл. Щраков през 2001 г. и са изучени в някои негови работи, както и в съвместната ни статия [Da-Sh;2002]. Сл. Щраков и К. Денеке през 2002 г. въвеждат съществени променливи и отделими множества от променливи за универсалните алгебри.

Да разгледаме позитивната Рийд-Мюлерова декомпозиция на булевите функции. Всеки от получените по-долу резултати, може да бъде преформулиран и за негативната Рийд-Мюлерова декомпозиция.

Булевата функцията $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ се разлага по отношение на променливата x_i , както следва:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i f_1 \oplus f_2. \quad (1)$$

В това представяне на f , функциите f_1 и f_2 са функции на останалите $n - 1$ променливи и ще ги наричаме *rm-подфункции* (Рийд-Мюлерови подфункции) или *квазиподфункции* на f . Самото “елиминирание” на променлива и получаването на съответна квазиподфункция ще означаваме с $f(x_i \models_{rm} c)$, където c е някоя от двете булеви константи 0 или 1, т.е.

$$f(x_i \models_{rm} c_i) = \begin{cases} f_2, & \text{ако } c_i = 0 \\ f_1, & \text{ако } c_i = 1 \end{cases}. \quad (2)$$

Ако $g = f(x_{i_1} \models_{rm} c_{i_1}, \dots, x_{i_k} \models_{rm} c_{i_k})$, където $M = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$, а $C = (c_{i_1}, \dots, c_{i_k}) \in \{0, 1\}^k$ са булеви константи, то тогава ще използваме означението $g \prec_{rm}^{M,C} f$.

По аналогия с дефинициите на съществена и фиктивна променлива, ще въведем понятията квазисъществени и квазификтивни променливи.

Определение 16 (21). Нека f е булева функция и нека нейната Рийд-Мюлерова декомпозиция, по отношение на променливата x_i , е $f = x_i f_1 \oplus f_2$. Променливата x_i е *квазисъществена* за $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ако $f_1 \neq f_2$. Променливата x_i се нарича *квазификтивна за функцията f* , когато съответните квазиподфункции съвпадат, т.е. $f_1 = f_2$.

Да отбележим, че от (1) и Определение 6 следва, че ако една променлива е квазификтивна, то тя се явява и 0-едностранна за съответната булева функция.

Съгласно дефиницията, въведена от S.Kauffman, функциите с квазификтивни променливи се явяват и канализиращи булеви функции (canalysing Boolean functions). Канализиращите булеви функции играят важна роля при моделирането с булеви мрежи на различни процеси, протичащи в клетките на организмите.

Определение 17 (22). [Ка;2000] Булевата функция $f \in F(n)$ се нарича канализираща (canalysing), ако съществуват $a, b \in$

$\{0, 1\}$ и съществува $i \in \{1, \dots, n\}$ такива, че за всяко $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ е изпълнено

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = a, x_{i+1}, \dots, x_n) = b.$$

Ако функцията f има много квазификтивни променливи, може да се очаква, че f е “по-проста”. Резултати в тази посока са получени от Y. Wang през 1995 г., където той разглежда симетрични и частично симетрични булеви функции.

Да отбележим, че така дефинирана, квазификтивността зависи от полярността на използваната декомпозиция, т.е. една променлива може да е квазификтивна по отношение на позитивната Рийд-Мюлерова декомпозиция и в същия момент да е квазисъществена по-отношение на негативната Рийд-Мюлерова декомпозиция.

Множеството на всички квазисъществени променливи за $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ще означаваме с $rmEss(f)$. Множеството на всички функции, които зависят квазисъществено от точно n променливи, ще означаваме с $Q(n)$.

Пример 1 (7). Нека $f = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Рийд-Мюлеровата декомпозиция на f , по отношение на променливата x_1 , е: $f = x_1(\overline{x_2}) \oplus \overline{x_2}$. Тук $x_1 \notin rmEss(f)$. Аналогично, Рийд-Мюлеровата декомпозиция на f , по отношение на променливата x_2 , е $f = x_2(\overline{x_1}) \oplus \overline{x_1}$, т.е. $x_2 \notin rmEss(f)$. Оттук следва, че $rmEss(f) = \emptyset$, но функцията f не е константа.

Този пример показва, че между съществените и квазисъществените променливи има съществена разлика, което е мотивация за по-задълбочено изучаване на квазисъществените променливи.

Определение 18 (23). Ако $f \in F(n)$, $n \geq 2$ и $\emptyset \neq M \subseteq rmEss(f)$, тогава променливата $x \in M$ се нарича *квази- силно съществена за f по отношение на множеството M* , ако съществува константа c , такава че $M \setminus \{x\} \subseteq rmEss(f(x \models_{rm} c))$.

Ако $f \in F(n)$, $n \geq 2$ и $\emptyset \neq M \subseteq rmEss(f)$, тогава множеството от всички квази- силно съществени променливи за f по отношение на множеството M , ще означаваме с $rmEss^*(f, M)$.

Определение 19 (24). Ако $f \in F(n)$, $n \geq 2$, ще казваме, че променливата $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$ е *квази- силно съществена* за функцията f , ако x_i е квази- силно съществена за f относно множеството $rmEss(f)$.

Ако $f \in F(n)$, $n \geq 2$ и $\emptyset \neq M \subseteq rmEss(f)$, тогава множеството от всички квази- силно съществени променливи за f по отношение на множеството M , ще означаваме с $rmEss^*(f, M)$. Аналогично с $rmEss^*(f)$ ще означаваме множеството от всички квази- силно съществени променливи за функцията f .

Очевидно една променлива може да се явява квазификтивна и в същия момент да е силно съществена за дадена булева функция. Резултати за броя на булевите функции, притежаващи такива променливи е даден по-долу.

функции на	m	0	1	2	3	4
2 променливи		7	2	1	-	-
3 променливи		193	21	3	1	-
4 променливи		63775	772	42	4	1

Таблица 4. (2.1) Брой на булевите функции, зависещи съществено от всичките си променливи, които имат точно m на брой квазификтивни променливи, явяващи се и силно съществени

Определение 20 (25). Ако $f \in F(n)$, $n \geq 2$ и $\emptyset \neq M_1 \subseteq rmEss(f)$, $M_2 \subseteq rmEss(f)$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, тогава ще казваме, че множеството M_2 е *квазиотделимо* за f по отношение на множеството M_1 , ако за променливите от M_1 съществуват такива стойности, че след “заместването” им с тях, за получената квази-подфункция g на f е в сила $M_2 \subseteq rmEss(g)$. Това ще означаваме с $M_2 \in rmSep(f, M_1)$.

Определение 21 (26). За булевата функция f ще казваме, че множеството M ($M \subseteq rmEss(f)$) е *квазиотделимо* за f , ако M е квазиотделимо за f по отношение на $rmEss(f) \setminus M$. Това ще означаваме с $M \in rmSep(f)$.

С $rmSep(f, m, x_i)$ ще означаваме всички множества от точно m променливи, които съдържат и променливата x_i и са квазиот-делими за f .

Нашата цел е да докажем теоремата за минималния брой квази- силно съществени променливи. За постигането на тази цел ще докажем някои спомагателни твърдения.

Лема 4 (13).

$$\begin{aligned} f(x_i \models_{rm} 1) &= f(x_i = 0) \oplus f(x_i = 1) \text{ и} \\ f(x_i \models_{rm} 0) &= f(x_i = 0), \end{aligned} \quad (3)$$

където с $f(x_i = c_i)$ сме означили, съответната подфункция за Шеноновата декомпозиция.

Лема 5 (14). Променливата x_i е квазификтивна за булевата функция $f(x_1, \dots, x_n)$, тогава и само тогава, когато $f(x_i = 1) = 0$.

За по-нататъшното изучаване на квазисъществените променливи ще имаме нужда и от следните твърдения.

Теорема 6 (15). Нека x_i и x_j са две променливи на булевата функция $f(x_1, \dots, x_n)$. Ако $g = f(x_i \models_{rm} \alpha_i)$ и $h = f(x_j \models_{rm} \beta_j)$ за $\alpha_i, \beta_j \in \{0, 1\}$, тогава $g(x_j \models_{rm} \beta_j) = h(x_i \models_{rm} \alpha_i)$.

Следствие 6.1 (15.1). Рийд-Мюлеровата декомпозиция е правилна.

Теорема 7 (16). Ако x_i е квазификтивна за булевата функция $f(x_1, \dots, x_n)$, тогава x_i е квазификтивна за всяка квазиподфункция на f .

Следствие 7.1 (16.1). Ако x_i е квазисъществена за някоя квазиподфункция $g \prec_{rm} f$, то x_i е квазисъществена и за f .

Това следствие се обобщава от следващата лема.

Лема 8 (17). Ако $f \in F(n)$, $g \prec_{rm} f$ и $M \in rmSep(g)$, то $M \in rmSep(f)$.

Теорема 9 (18). Ако $f \in Q(n)$, $n \geq 2$ и $M_1 \in rmSep(f, M_2)$, $M_2 \neq \emptyset$, тогава съществува поне една променлива от M_2 , която е квази- силно съществена за f относно $M_1 \cup M_2$.

Тази теорема можем да обобщим по следния начин:

Теорема 10 (19). Всяка функция f , която зависи квазисъществено поне от две променливи, има поне две квази- силно съществени променливи.

Теорема 11 (20). Ако $f \in Q(n)$, $n \geq 2$ и g е квазиподфункция на f относно M ($M \neq \emptyset$), тогава съществуват квазиподфункции f_i , ($i = 1, \dots, m$, където $m = |M|$) на f , за които

$$g \prec_{rm} f_1 \prec_{rm} f_2 \prec_{rm} \dots \prec_{rm} f_m = f \quad (4)$$

и за всяко $i = 1, \dots, m$, функцията f_i зависи квазисъществено от точно i променливи, които принадлежат на M .

Следствие 11.1 (20.1). Ако $f \in F(n)$, $n \geq 2$ и $M \in rmSep(f)$, където $M \subset rmEss(f)$, то съществува поне една променлива $x_t \in rmEss(f) \setminus M$, такава че $M \cup \{x_t\} \in rmSep(f)$.

Естествено следва и въпросът, дали свойствата на квазиотделимите множества се запазват при операциите проекция (заместване на променливи с константи) и отъждествяване на променливи.

От доказаните до този момент теореми може да се очаква до голяма степен аналогично поведение за квазиотделимите множества и квази- силно съществени променливи, както при отделимите и силно съществени променливи. В следващите теореми ще проверим кои от тези свойства могат да се докажат и за квазиотделимите множества.

Теорема 12 (21). Ако $f \in Q(n)$, $n \geq 3$ и x_1 образува квазиотделими двойки само с $x_2, \dots, x_{r+1}$, тогава всяка квазиподфункция на f , относно променливите в $rmEss(f) \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{r+1}\}$, зависи квазисъществено от x_1 .

Теорема 13 (22). Ако $f(x_1, \dots, x_n) \in Q(m)$, където $1 \leq m \leq n - 1$ и $x_i \in rmEss(f)$, а $x_j \notin rmEss(f)$, то $x_i \notin rmEss(f(x_j \leftarrow x_i))$.

Връзка между отделимите множества от променливи и квазификтивните променливи се установява от следващото твърдение.

Теорема 14 (23). Ако $f(x_1, \dots, x_n)$ е функция от порядък n и променливата x_i е квазификтивна, но същевременно и съществена за функцията, то x_i образува отделими множества от променливи с всички останали съществени променливи на функцията f .

Това твърдение може да се усили за всяка 0-едностранна променлива.

Следствие 14.1 (23.1). Ако $f(x_1, \dots, x_n)$ е функция от порядък n и променливата x_i е 0-едностранна променлива за функцията, то x_i образува отделими множества от променливи с всички останали съществени променливи на функцията f .

Глава 3. Диаграми за двоично решаване и силно съществени променливи на функциите

Диаграмите за двоично решаване (ДДР) са най-често използваните структури от данни за представяне и манипулиране на булеви функции. Наредените диаграми за двоично решаване (НДДР) са специална форма на диаграмите за двоично решаване. Като структура от данни, най-често използвана в автоматизираното проектиране и валидиране на схеми с висока степен на интеграция, наредените диаграми за двоично решаване са въведени от R. Bryant в [Br;1986].

Определение 22 (27). Нека π е линейна наредба над множеството от променливи $x_1, \dots, x_n$. *Наредена диаграма за двоично решаване (НДДР, OBDD)*, по отношение на наредбата на променливите π (π -OBDD), е насочен ацикличесен граф с един корен и удовлетворяващ следните условия:

- Съществуват само два върха без изходящи дъги. Тези два върха са означени с константите 1 и 0 и се наричат *терминални върхове*.
- Всеки нетерминален възел е означен с някаква променлива

x_i и има две изходящи дъги, които са означени с 1 и 0. Тези дъги се наричат *1-дъга* (означавана графично с пълтна линия) и *0-дъга* (означавана графично с прекъсната линия).

- Редът, в който променливите се появяват в пътищата на графа, съвпада с наредбата π , т.е. за всяка дъга от възел, означен с x_i , към възел, означен с x_j , е в сила $x_i <_{\pi} x_j$.

Всяка булева функция може да се представи чрез наредена диаграма за двоично решаване по следния начин:

Определение 23 (28). Наредена диаграма за двоично решаване с корен във върха v представя функцията f_v , която се дефинира рекурсивно по следния начин:

(1) Ако v е терминален възел, тогава $f_v = \text{val}(v)$, където $\text{val}(v) \in \{0, 1\}$.

(2) Ако v е нетерминален възел означен с x_i , тогава

$$f_v(x_1, \dots, x_n) = \overline{x_i}f(x_i = 0) + x_if(x_i = 1).$$

$\Pi_{\mathcal{T}}$ в НДДР е последователност от свързани възли, започвайки от корена на диаграмата и завършвайки с терминален възел.

В зависимост от това, с кой терминален връх завършва един път, ние можем да разделим множеството Π от пътищата за дадена НДДР на две непресичащи се подмножества Π_0 и Π_1 , така че $\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1$, където Π_1 са пътищата, завършващи с терминалния връх 1, а Π_0 – завършващите с 0.

Функцията, представена чрез НДДР, можем да получим като дизюнкция на конюнкциите на участващите върхове във всички възможни пътища Π_1 (от корена до терминалния връх означен с 1).

Определение 24 (29). За всеки възел v от НДДР може да дефинираме *поддиаграма с корен възела v* , като частта от диаграмата включваща v и всички възли (и дъги) участващи във всички пътища от v до терминалните възли.

Понеже компактното представяне е от съществено значение за ефективното използване на НДДР с цел избягване на излишни

проверки (вземане на решения) са въведени някои ограничения (редукционни правила) за НДДР от R. Bryant [Br;1986].

Правило S : Премахване на нетерминалните възли, за които и двете изходящи дъги сочат един и същ възел.

Правило I : Премахване на всички нетерминални възли, означени с еднакви променливи, които са корени на изоморфни поддиаграми.

НДДР, върху които не може да се приложат нито едно от редукционни правила, се нарича *Редуцирана НДДР* (РНДДР, ROBDD). Каноничността на РНДДР е доказана от R. Bryant през 1986 г, т.е. че РНДДР е нормална форма, относно редукционната система определена от редукциите S и I .

Теорема 15 (24). [Br;1986] Всяка булева функция $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$, може да бъде реализирана с точно една редуцирана наредена диаграма за двоично решаване при зададена наредба $\pi : x_{i_1} <_\pi x_{i_2} <_\pi \dots <_\pi x_{i_n}$ на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Под сложност на една редуцирана наредена диаграма за двоично решаване G , ще разбираме броя на нейните нетерминални върхове. Естествено е да предположим, че сложността на НДДР се влияе от реда на декомпозиция. За да конкретизираме точно определен ред $\pi : x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_n}$ на построяване на РНДДР, ще пишем π -РНДДР, с граф G^π и сложност на реализация $\mathcal{C}(G^\pi)$.

Построяването на минимална НДДР е от съществено значение за ефективното манипулиране и автоматизирания анализ и синтез на схеми, представяни от булеви функции. Повечето алгоритми, които са предложени за построяване на минимална диаграма, се базират на локална размяна на променливи при вече построена НДДР за дадената функция. През 1996 г. Boling и Wegener в [Bo-We;1996] доказват, че подобряването на реда на декомпозиция за построяване на оптимална РНДДР е NP -пълнен проблем.

Следващите две твърдения са изходна основа за по-нататъшно изучаване на РНДДР.

Лема 16 (25). Ако за булевата функция $f \in F(n)$ променливата x_i е съществена, то тогава съществува поне един възел, означен с x_i , в нейните РНДДР, без значение на използваната наредба π .

Ако променливата x_i е фиктивна за функцията f , тогава не съществува възел, означен с тази променлива в РНДДР, без значение на използваната наредба π .

Лема 17 (26). За всеки нетерминален възел в РНДДР, съществува поне един път $p \in \Pi_1$ и поне един път $q \in \Pi_0$, които минават през него.

Теорема 18. [27] Нека $N = \{x_1, \dots, x_l\} \subset \text{Ess}(f)$, $M = \{x_{l+1}, \dots, x_m\} \subset \text{Ess}(f)$ и $N \in \text{Ann}(M, f)$. Ако π е наредба на променливите в $\text{Ess}(f)$, така че в нея x_i е пред x_j за всяко $1 \leq i \leq l$ и $l+1 \leq j \leq m$, то нито един път в π -РНДДР не може да съдържа като възли всички променливи на M .

Следствие 18.1 (27.1). Ако за булевата функция $f \in F(n)$, $|\text{Ess}(f)| = n$ променливите x_i и x_j не образуват отделима двойка, тогава съществува такава наредба π , че π -РНДДР на f няма път, който да съдържа x_i и x_j .

Следствие 18.2 (27.2). Ако $f \in F(3)$ и $\{x_1\} = \text{Ann}(\{x_2, x_3\}, f)$, тогава минималната РНДДР се получава за наредба на променливите π , такава че $x_1 <_\pi x_2$ и $x_1 <_\pi x_3$.

Броят на различните подфункции, които продължават да зависят съществено от своите променливи, рефлектира върху сложността на НДДР. Сложността на НДДР зависи от броя на нетерминалните възли. Връзката между броя на подфункциите, които зависят съществено от дадена променлива и нетерминалните възли, означени с тази променлива, е показана от D. Sieling и I. Wegener в [S-W;1993].

Лема 19 (28). [S-W;1993] Нека S_i е множество от подфункциите $f(x_1 = c_1, \dots, x_{i-1} = c_{i-1})$, които зависят съществено от x_i , а $c_1, \dots, c_{i-1}$ са булеви константи. Тогава π -РНДДР за f , при естествената лексикографска наредба $\pi : x_1 <_\pi x_2 <_\pi \dots <_\pi x_n$ съдържа точно $|S_i|$ възли, означени с x_i .

Определение 25 (30). Нека f е булева функция от порядък $n \geq 3$ и нека M и N са две множества от съществени променливи за функцията f , като $M \in \text{Ann}(N, f)$. Ако за всяко $N_1 \subsetneq N$ е в сила $M \notin \text{Ann}(N_1, f)$ ще казваме, че M е *собствено дистрибутивно множество* за N и f .

Теорема 20. [29] Нека $f \in F(n)$, $|\text{Ess}(f)| = n$ и нека $M = \{x_i\}$ е собствено дистрибутивно множество за N и f където $N \subset \text{Ess}(f)$. Ако $x_k \in N$ и $S_k = \{h \in F(n-1) | h = f(x_k = c), x_i \in \text{Ess}(h)\}$, то $|S_k| \geq 2$.

За да определим дали една променлива е силно съществена или едно множество от променливи е например – отделимо, трябва да се изследват множество варианти за присвояване на константи за променливите.

Съгласно Определение 9, една променлива x_i за функцията f е силно съществена, относно дадено множество M от променливи, ако M се явява отделимо за функцията f по отношение на множеството $\{x_i\}$. От Лема 16 следва, че ако е построена π -РНДДР, където наредбата π е такава, че $x_i <_\pi x_j$, за всяко $j < i$, то поне една от поддиаграмите съдържа възли, означени с всички останали променливи на функцията.

Променливите, които не са силно съществени за дадена функция, се явяват дистрибутори за останалите променливи. Една от възможностите да представим булевите функции, на които не всички променливи са силно съществени, оптимално е като започнем построяването на диаграмите за двоично решаване, именно с променливи, които не са силно съществени.

Глава 4. Силно съществени променливи и отделими множества в универсални алгебри

Различни автори разглеждат съществените променливи в различни аспекти. Обикновено вместо функция, някои разглеждат термове, от което следва естествено въвеждането на аналогични конструкции за съществени променливи и отделими множества за

алгебри и многообразия.

Ако използваме съществуващата дефиниция за функции, като вместо функцията f разгледаме *фундаменталния терм* $f(x_1, \dots, x_n)$ и преминем от *термове* към *терм-операции*, които се пораждат от термовете в дадена алгебра $\underline{A}$, естествено може да се въведе понятието *съществена променлива за термове*.

Определение 26 (31). Нека $\mathcal{F}$ е едно крайно множество, елементите на което се наричат операционни (функционални) символи. Нека $\tau : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$ е едно изображение в множеството на неотрицателните цели числа, като за $f \in \mathcal{F}$ с $\tau(f)$ се означава членността на операционния символ f . Двойката $(\mathcal{F}, \tau)$ се нарича *тип* или *сигнатура*. Често, когато е ясно кое е множеството $\mathcal{F}$, ще пишем само “тип τ ”. Множеството от операционни символи от членност p ще означаваме с $\mathcal{F}_p$. Елементите от членност $0, 1, \dots, p$ се наричат съответно константи (нуларни), унарни, бинарни, ..., p -арни операционни символи. Понякога ще използваме едно крайно множество I , за да индексирате $\mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F} := \{f_i | i \in I\}$.

Една сигнатура τ ще считаме за тривиална, ако $\mathcal{F} = \emptyset$. По-нататък ще разглеждаме само нетривиални сигнатури.

Определение 27 (32). Нека A е едно непразно множество и n е естествено число. Тогава $A^0 := \{\emptyset\}$, а A^n е множеството от всички наредени n -торки (вектори) от елементи на A . Образът на $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ при n -членната функция $f : A^n \rightarrow A$ се означава с $f(a_1, \dots, a_n)$. Когато $n = 0$, n -членните функции се наричат *нуларни функции* или *константи*, и те са напълно определени от образа $f(\emptyset)$ в A , т.е. всяка нуларна операция се разглежда като един елемент на A .

Определение 28 (33). Нека е дадена сигнатура τ . Тогава под *алгебра $\underline{A}$ от тип τ* ще разбираме наредената двойка $\underline{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\underline{A}} \rangle$, където A е непразно множество, наречено *универсум* или *носещо множество (support)* на $\underline{A}$. Множеството $\mathcal{F}^{\underline{A}} := \{f^{\underline{A}} | f \in \mathcal{F}\}$ се състои от крайни операции на $\underline{A}$, съгласувани с типа τ , така че те осъществяват съответствие, като на всеки n -членен операционен символ f във $\mathcal{F}$ се съпоставя по една n -членна операция $f^{\underline{A}}$,

наречена *фундаментална операция* на $\underline{A}$.

С $Alg(\tau)$ ще означаваме класът на всички алгебри от тип τ .

Определение 29 (34). Нека $\underline{A}$ и $\underline{B}$ са две алгебри от тип τ . Тогава едно изображение $\varphi : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ се нарича *хомоморфизъм* от $\underline{A}$ в $\underline{B}$, ако за всеки n -членен операционен символ $f \in \mathcal{F}$ и за всяка наредена n -торка $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ е в сила

$$\varphi(f^{\underline{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\underline{B}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)).$$

Хомоморфизъм, който е взаимно еднозначно изображение се нарича *изоморфизъм*.

Определение 30 (35). Нека $(f_i)_{i \in I}$ е едно индексирано множество от операционни символи, където f_i е n_i -членна операция и нека $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ е едно n -елементно множество от променливи. n -членни термове от тип τ се дефинират рекурсивно както следва:

- (i) За всяко $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in X_n$ е n -членен терм;
- (ii) Ако $t_1, \dots, t_{n_i}$ са n_i -членни термове и ако f_i е n_i -членен операционен символ, то $f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$ е n -членен терм.

Множеството $W_\tau(X)$ от всички термове от тип τ може да се разглежда като минимално множество, за което

$$(i) \quad X \cup \mathcal{F}_0 \subseteq W_\tau(X)$$

- (ii) Ако f е n -членен операционен символ и $t_1, \dots, t_n$ са термове, тогава $f(t_1, \dots, t_n)$ е терм. Когато $t_1, \dots, t_n$ са променливи, то получения от тях терм $f(x_1, \dots, x_n)$ се нарича *фундаментален терм*.

С $W_\tau(X_n)$ ще означаваме множеството на всички n -членни термове от тип τ . Ако $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ е една изброима безкрайна азбука от променливи, то $W_\tau(X) := \bigcup_{n=1}^{\infty} W_\tau(X_n)$ е множеството от всички термове от тип τ .

За $t \in W_\tau(X)$ с $\text{var}(t)$ ще означаваме множеството на всички променливи, които се появяват в t .

Определение 31 (36). Нека $\underline{A}$ е алгебра от тип τ и нека t е един n -членен терм от тип τ над X_n . Тогава t поражда n -арна терм операция $t^{\underline{A}}$ в $\underline{A}$, наречена *терм операция породена от терма t* по следния начин:

1. Ако $t = x_j \in X_n$, тогава $t^{\underline{A}} = x_j^{\underline{A}}$, където $x_i^{\underline{A}} := e_i^n (i \leq n)$, $e_i^n(a_1, \dots, a_n) := a_i$ за всяко $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$.
2. Ако $t = f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$ е n_i -членен терм от тип τ и $t_1^{\underline{A}}, \dots, t_{n_i}^{\underline{A}}$ са терм операции, които са породени от $t_1, \dots, t_{n_i}$, тогава $t^{\underline{A}} = f_i^{\underline{A}}(t_1^{\underline{A}}, \dots, t_{n_i}^{\underline{A}})$.

С $T(\underline{A})$ ще означаваме множеството на всички операции, породени от произволни термове от $W_\tau(X)$. Елементите на $T(\underline{A})$ ще наричаме *терм-операции* на алгебрата $\underline{A}$, а $T(\underline{A})$ ще наречаме *клон на терм-операциите* на алгебрата $\underline{A}$.

Може да се каже, че след дефинирането на алгебрата $\underline{A}$, термовете от даден тип τ задават множеството $T(A)$, което е множество от суперпозициите над $\mathcal{F}^{\underline{A}}$.

Ако s, t са термове от тип τ , тогава $s \approx t$ ще наричаме *твърдение удовлетворено в алгебрата $\underline{A}$ от тип τ* , ако породените терм-операции са равни, т.е. ако $s^{\underline{A}} = t^{\underline{A}}$. В този случай пишем $\underline{A} \models s \approx t$.

Определение 32 (37). [Sh-De;2002] Нека $t \in W_\tau(X_n)$ е един n -членен терм от тип τ и нека $\underline{A}$ е алгебра от тип τ . Тогава променливата x_i , $1 \leq i \leq n$, се нарича *съществена за t относно алгебрата $\underline{A}$* , ако терм-операцията $t^{\underline{A}} : A^n \rightarrow A$, породена от t върху алгебрата $\underline{A}$, зависи съществено от своята i -та променлива x_i .

Ще означаваме с $Ess(t, \underline{A})$ множеството от всички променливи, които са съществени за t относно алгебрата $\underline{A}$.

Тази дефиниция показва, ако $\underline{A}$ е изоморфна алгебра на $\underline{B}$, то x_i е съществена за t относно $\underline{A}$ точно тогава, когато x_i е съществена за t относно $\underline{B}$.

Наистина, ако $\varphi : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ е един изоморфизъм и x_i е съществена променлива за t относно $\underline{A}$, тогава съществуват елементи

$a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n, b_i \neq a_i$ такива, че
 $t^{\underline{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq t^{\underline{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Но тогава

$$\begin{aligned} & \varphi(t^{\underline{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)) = \\ & = t^{\underline{B}}(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_{i-1}), \varphi(a_i), \varphi(a_{i+1}), \dots, \varphi(a_n)) \neq \\ & \neq t^{\underline{B}}(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_{i-1}), \varphi(b_i), \varphi(a_{i+1}), \dots, \varphi(a_n)) = \\ & = \varphi(t^{\underline{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n)) \end{aligned}$$

като $\varphi(a_i) \neq \varphi(b_i)$, откъдето следва, че x_i е съществена променлива за t относно алгебрата $\underline{B}$.

За да докажем теоремата за минималния брой силно съществени променливи ще опишем една друга гледна точка за съществените променливи за термове. Този подход има по-близко до лингвистичното значение на термовете, а именно, чрез въвеждане на оценъчни изображения, в които се използва и допълнителна променлива (x_{n+1}) .

Определение 33 (38). Нека $\underline{A} = (A; (f_i^A)_{i \in I})$ е една алгебра от тип τ и нека $\overline{A}$ е едно множество от елементи, за което имаме, че $|\overline{A}| = |A|$ и $\overline{A} \cap X = \emptyset$. Едно изображение $h : X_n \cup \overline{A} \rightarrow T(\underline{A})$ се нарича *оценка (оценъчно изображение) на множеството* $M = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\} \subseteq X_n$ с *редицата* $C = (\bar{c}_{i_1}, \dots, \bar{c}_{i_m}) \in \overline{A}^m$, ако

$$h(x_j) = \begin{cases} x_j & \text{за } x_j \notin M \\ \bar{c}_j & \text{за } x_j \in M \end{cases} \quad \text{и } h(\bar{a}) = \bar{a} \text{ за всяко } \bar{a} \in \overline{A}.$$

Да отбележим, че $\overline{A} \subset T(\underline{A})$ и елементите на $\overline{A}$ са константните терм-операции над A , т.е. те са получени от нуларни термове от тип τ .

Без ограничение на общността приемаме, че типът τ включва поне m нуларни термове при $m \geq |\overline{A}|$.

Очевидно, всяка оценка на множеството M с $C \in \overline{A}^m$ е еднозначно определена от M и C и може да бъде разширена по единствен начин до изображение (ендоморфизъм) $\bar{h} : T(\underline{A}) \rightarrow T(\underline{A})$. За разширението е в сила $\bar{h}(\bar{h}(p)) = \bar{h}(p)$ за всеки терм $p \in W_\tau(X_n)$, т.е. $\bar{h}$ е идемпотент. Нещо повече, ние имаме $\text{var}(\bar{h}(p)) = \text{var}(p) \setminus M$.

Ако $M = X_n$, $C \in \overline{A}^n$ и ако заместим константите $\bar{a} \in \overline{A}$ с

техните съответни елементи от A ние ще получим оценъчно изображение на X с A , както беше въведено по-горе.

Теорема 21 (30). [Sh-De;2002] Една променлива $x_i \in X_n$ е съществена за терма t (от тип τ) точно тогава, когато съществува една оценка h на множеството $M = X_n \setminus \{x_i\}$ с някоя редица $C \in \overline{A}^{n-1} (|\overline{A}| = |A|)$, така че едночленната операция $\bar{h}(t)^{\underline{A}}$ приема поне две стойности, т.е. не е константа.

Това твърдение е еквивалентно на следното

Теорема 22 (31). [Sh-De;2002] Една променлива $x_i \in X_n$ е съществена за терма t (от тип τ), относно алгебрата $\underline{A}$ (от тип τ) точно тогава, когато съществува поне една оценка $h : X_n \setminus \{x_i\}$ с $C \in \overline{A}^{n-1} (|\overline{A}| = |A|)$, така че $x_i \in Ess(\bar{h}(t), \underline{A})$.

Теорема 23 (32). [Sh-De;2002] Нека $M \subseteq X_n$ е непразно подмножество на X_n и $x_j \notin M$. Ако за всяка оценка h на M с $C \in \overline{A}^{|M|}$, $|\overline{A}| = |A|$ е в сила $x_j \notin Ess(\bar{h}(t), \underline{A})$, където $\underline{A}$ е алгебра от тип τ , то $x_j \notin Ess(t, \underline{A})$.

Следващата Лема ни дава възможност да погледнем на съществените променливи като на обекти определени чрез тъждества и с участие на допълнителна променлива x_{n+1} .

Лема 24 (33). [Sh-De;2002] Една променлива $x_i \in X_n$ е съществена за n -членния терм t (от тип τ) относно дадена алгебра $\underline{A}$ от тип τ точно тогава, когато терموвете t и $\bar{g}(t)$ не образуват тъждество в $\underline{A}$, т.е.

$$\underline{A} \not\models t \approx \bar{g}(t),$$

където $g : X_n \rightarrow W_\tau(X_{n+1})$ е изображение, дефинирано чрез $g(x_i) = x_{n+1}$ и $g(x_j) = x_j$ за всяко $j \neq i$, $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\bar{g}$ е естествено хомоморфно разширение на g , т.е. $\bar{g} : W_\tau(X_n) \rightarrow W_\tau(X_{n+1})$ и $\bar{g}(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\bar{g}(t_1), \dots, \bar{g}(t_n))$ за всеки терм $t = f(t_1, \dots, t_n) \in W_\tau(X_n)$.

Следствие 24.1 (33.2). Нека $s, t \in W_\tau(X_n)$, $n \geq 1$, и да допуснем, че $\underline{A} \in Alg(\tau)$. Ако $\underline{A} \models s \approx t$, то $Ess(t, \underline{A}) = Ess(s, \underline{A})$.

Определение 34 (40). Един терм $t \in W_\tau(X)$ се нарича *подтерм*

на терма $s \in W_\tau(X)$ относно алгебрата $\underline{A}$ от тип τ , което отбелязваме с $t \prec s$, ако съществува оценка h на някое подмножество $M \subset \text{var}(s)$ с редицата $C \in \overline{A}^{|M|}$, $(|\overline{A}| = |A|)$ така, че $\underline{A} \models t \approx \bar{h}(s)$.

Със $\text{Sub}(t, \underline{A})$ ще означаваме множеството от всички подтермови на терма t от тип τ относно алгебрата $\underline{A}$.

Очевидно, ако $t \prec s$, то $\text{Ess}(t, \underline{A}) \subseteq \text{Ess}(s, \underline{A})$.

Отново следвайки подхода за съществени променливи, може да се въведе и понятието *отделими множества* от променливи за термови.

Определение 35 (41). [Sh-De;2002] Нека $\underline{A}$ е алгебра от тип τ и нека $\overline{A}$ е множество от константи-символи (чрез елементи от A) с $|A| = |\overline{A}|$. Едно множество M от съществени променливи в терма $t \in W_\tau(X)$ относно алгебрата $\underline{A}$ се нарича *отделимо в t относно алгебрата $\underline{A}$* , ако съществува поне една оценка $\bar{h}$ на $X_n \setminus M$ с $C \in \overline{A}^{n-|M|}$, така че $M = \text{Ess}(\bar{h}(t), \underline{A})$.

Чрез $\text{Sep}(t, \underline{A})$ ще означаваме множеството от всички отделими множества t относно $\underline{A}$.

По подобие на твърденията, отнасящи се за отделими множества от променливи за дискретните функции, могат да бъдат изведени някои аналогични резултати.

Теорема 25 (35). [Sh-De;2002] Нека s, t са термови от тип τ и нека $\underline{A}$ е алгебра от тип τ .

- (i) Ако s и t са два терма с $\underline{A} \models s \approx t$, то $\text{Sep}(s, \underline{A}) = \text{Sep}(t, \underline{A})$.
- (ii) Ако $s \prec t$, то $\text{Sep}(s, \underline{A}) \subseteq \text{Sep}(t, \underline{A})$.

Основната ни цел тук е да въведем силно съществени променливи и да докажем теоремата за минималния брой силно съществени променливи за термови в универсални алгебри.

Определение 36 (43). Нека $t \in W_\tau(X_n)$ е един n -членен терм и $\underline{A}$ е алгебра от тип τ . Ще казваме, че променливата $x_i \in X_n$ е *силно съществена* за t относно $\underline{A}$, ако съществува оценка $\bar{h}$, с която да оценим термът t за множеството $\{x_i\}$ с $c \in A$, така че $X_n \setminus \{x_i\} \subseteq \text{Ess}(\bar{h}(t), \underline{A})$.

Теорема 26 (36). Ако $\emptyset \neq M \subsetneq X_n = \text{Ess}(t, \underline{A})$ е отделимо множество за терма t относно алгебрата $\underline{A}$, то съществува променлива $x_i \in X_n \setminus M$, която е силно съществена за t относно $\underline{A}$.

Следствие 26.1 (36.1). Ако $|\text{Ess}(t, \underline{A})| \geq 2$, то t има поне две силно съществени променливи относно $\underline{A}$.

В тази глава е направена връзката между структурните свойства на дискретните функции и свойствата на термовете в универсалните алгебри. Доказаната от автора теорема за минималния брой силно съществени променливи за термове относно алгебра показва универсалния характер на резултата получен от К. Чимев за дискретни функции.

Глава 5. Съществени входи за автомати работещи върху дървета

Виждането, че крайните автомати могат да се разглеждат като унарни алгебри се отнася до J.Büchi и J.Wright (1960). В много статии дърветата се използват като диаграми на термовете. Основополагащи резултати за автомати с дървета са представени за първи път в книгата *Tree Automata* на F. Gécseg и M. Steinby (1984). Едно от основните направления е в търсене на оптимални, минимизирани автомати. Това се постига като се редуцират несъществените (фиктивните) елементи в автоматите. Тази концепция е продължена в работите на много изследователи [Com-D-G-J-L-T-T;1999]. В началото на настоящия век идеята за по-задълбочено изучаване на съществените входи и отделими множества от входи за автомати, работещи върху дървета, е въведена от Сл.Щраков в [Sh;2001] и доразвита в [Sh-Sh;2001], [Da-Sh;2002], [Sh;2009]. Резултатите в тази глава хронологично са получени преди обобщението направено в Глава 4. Заради широкото приложение на автоматите, работещи върху дървета в съвременните информационни технологии, отделяме специално внимание и на тях.

Автоматите работещи върху дървета са в основата и на попу-

лярната XML технология [W3ORG]. Простотата на XML и неговата изразителна мощ позволяват неговото използване в различни области на софтуерния дизайн и разработване, обмен и извличане на информация.

След като в предходната глава разгледахме универсалните алгебри и въведохме понятия като съществени променливи и отделими множества от променливи относно алгебри и многообразия, сега ще трансформиране тези понятия относно автомати, работещи върху дървета.

Както и досега, нека с $\mathcal{F}$ отбелязваме крайното множество от операционни символи. Нека $\tau : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$ е изображение в множеството на неотрицателните цели числа. Множеството от символи с разрядност p ще означаваме с $\mathcal{F}_p$. Елементите с разрядност $0, 1, \dots, p$ респективно ще наричаме *константи (нуларни), унарни, ..., p-арни* символи. Ще предполагаме, че множеството на нуларните символи не е празно, т.е. $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

С $W_\tau(X)$, както и досега, ще означаваме множество $W_\tau(X) := \cup_{n=1}^{\infty} W_\tau(X_n)$, от всички термове от тип τ , където $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Ако $X = \emptyset$, то $W_\tau(X)$ също ще означаваме с W_τ . Термовете в W_τ се наричат *основни термове (ground terms)*.

Нека t е терм. С $\text{var}(t)$ ще означаваме множеството от всички променливи от X , които се срещат в t . Елементите на $\text{var}(t)$ се наричат *входни променливи или входове* за t .

Нека t е терм и да предположим, че за всяка променлива x е определен един терм s_x . Термът, означен с $t(x \leftarrow s_x)$, се получава чрез едновременно заместване в t на всяко появяване на променливата x с терма s_x .

Всяко подмножество L на $W_\tau(X)$ ще наричаме *език от дърветата* от тип τ или *tree-language*.

Нека $\mathbb{N}$ е множеството от естествените числа и $\mathbb{N}^*$ е множество от крайните думи над $\mathbb{N}$. Множеството $\mathbb{N}^*$ е естествено наредено по следния начин $n \preceq m \iff n$ е префикс на m , при $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Термът $t \in W_\tau(X)$ може да бъде разглеждан и като крайно наредено дърво, листата на което са означени с променливи или константни символи, а вътрешните възли са означени с операци-

онни символи. Възлите, означени с операционни символи имат изходящи ребра, броят на които се определя от типът τ , т.е. термът $t \in W_\tau(X)$ може да бъде дефиниран като частична функция $t : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathcal{F} \cup X$ с домейн $Pos(t)$. Множеството $Pos(t)$ удовлетворява следните условия:

- (i) $Pos(t)$ е непразно и префиксно затворено;
- (ii) За всяко $p \in Pos(t)$, ако $t(p) \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$, то $\{i|pi \in Pos(t)\} = \{1, \dots, n\}$;
- (iii) За всяко $p \in Pos(t)$, ако $t(p) \in X \cup \mathcal{F}_0$, то $\{i|pi \in Pos(t)\} = \emptyset$.

Елементите на множеството $Pos(t)$ се наричат *позиции*. *Предна позиция* за един терм е позицията p , за която $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*$, $p\alpha \notin Pos(t)$. Всяка позиция p в t с $t(p) \in X$ се нарича *позиция на променлива* и ако $t(p) \in \mathcal{F}_0$, то се нарича *позиция на константа*.

Определение 37 (44). *Подтерм (поддърво) $t(p)$ на $t \in W_\tau(X)$ на позиция p се задава както следва:*

- (i) $Pos(t(p)) = \{i|pi \in Pos(t)\}$;
- (ii) $\forall j \in Pos(t(p)), \quad t(p)(j) = t(pj)$.

Подтермовете на предните позиции за t се наричат *входове* за t .

Най-външният операционен символ f за t ще означаваме с $Root(t)$, т.е. f е *корен* на t само, ако $t(\varepsilon) = f$, където ε е празния низ в $\mathbb{N}^*$.

Така дефинирахме релация на частична наредба в множеството $W_\tau(X)$ от всички термове. Ще означаваме с $\leq$ наредбата на подтермовете, т.е. ще пишем $t \leq t'$, ако има позиция p за t' , такава че $t = t'(p)$ и още ще казваме, че t е подтерм за t' . Ще пишем $t \triangleleft t'$, ако $t \leq t'$ и $t \neq t'$.

Веригата от подтермове $Ch := t_{p_1} \triangleleft t_{p_2} \triangleleft \dots \triangleleft t_{p_k}$ ($k \geq 2$) ще наричаме *строга*, ако за всяко $j \in \{1, \dots, k-1\}$ няма терм s , такъв че $t_{p_j} \triangleleft s \triangleleft t_{p_{j+1}}$.

Определение 38 (45). Нека $Y \subseteq X$ е множеството от променливи и $\gamma : Y \rightarrow \mathcal{F}_0$ е функцията, която съпоставя нуларни операционни символи (константи) на всяка входна променлива от Y . Функцията γ се нарича *съпоставяне на множеството Y от входове* и множеството от тези съпоставяния ще означаваме с $Ass(Y, \mathcal{F}_0)$.

Определение 39 (46). *Краен автомат, работещ върху дървета*, е четворката $A = \langle Q, \mathcal{F}, Q_f, \Delta \rangle$, където:

- Q е крайно множество от състояния;
- $Q_f \subseteq Q$ е множество от заключителни състояния;
- Δ е множество от транзакционни (продукционни) правила, т.е. ако $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_n$, то $\Delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n\}$, където Δ_i са изображения $\Delta_0 : \mathcal{F}_0 \rightarrow Q$, и $\Delta_i : \mathcal{F}_i \times Q^i \rightarrow Q$, за $i = 1, \dots, n$.

Ще предполагаме, че автоматът A е напълно определен, т.е. Δ -тите са тотални изображения в техния домейн.

Нека $t \in W_\tau(X)$, $\gamma \in Ass(Y, \mathcal{F}_0)$ и $Y = \{x_1, \dots, x_m\}$. С $\gamma(t)$ ще означаваме термът $\gamma(t) = t(x_1 \leftarrow \gamma(x_1), \dots, x_m \leftarrow \gamma(x_m))$.

Всяко съпоставяне $\gamma \in Ass(Y, \mathcal{F}_0)$ може да бъде разширено по естествен начин до изображение, дефинирано върху множеството $W_\tau(X)$ на всички термове, като $\gamma(x_i) = x_i$ за всяко $x_i \in X \setminus Y$.

Нека $t \in W_\tau(X)$ и $\gamma \in Ass(X, \mathcal{F}_0)$. Автоматът $A = \langle Q, \mathcal{F}, Q_f, \Delta \rangle$ работи върху t с γ . Той започва от листата на t и се придвижва надолу, присвоявайки на всяка стъпка на съответното поддърво по едно състояние, съгласно правилата за преход.

Автоматът A асоциира с t състоянието $q \in Q$, където $q = \Delta_0(\gamma(x_i))$, ако $t = x_i \in X$ и $q = \Delta_0(f_0)$, ако $t = f_0 \in \mathcal{F}_0$. Ако $t = f(t_1, \dots, t_n)$ и състоянията $q_1, \dots, q_n$ са асоциирани с поддърветата $t_1, \dots, t_n$ на t , то тогава автоматът A асоциира състоянието q на t , където $q = \Delta_n(f, q_1, \dots, q_n)$.

Началните състояния на автомата са състоянията, асоциирани с листата на дървото.

Дървото t , $t \in W_\tau(X)$, се приема (разпознава) от автомата $A = \langle Q, \mathcal{F}, Q_f, \Delta \rangle$, ако съществува съпоставяне γ , такова че при работа

на автомата A над t с γ , той присвоява на t някое заключително състояние $q \in Q_f$.

Когато автоматът A присвоява състояние q на поддървото s , това ще означаваме с $A(\gamma, s) = q$.

Нека $t \in W_\tau(X)$ и автоматът A разпознава дървото t . Множеството от всички разпознаваеми от A дървета ще наричаме *език от дървета*, разпознаваем от A и ще го означаваме с $L(A)$.

Определение 40 (47). Нека $t \in W_\tau(X)$ и нека A е автомат, работещ върху дървета. Входната променлива (входът) $x_i \in \text{var}(t)$ наричаме *съществена* за двойката (t, A) , ако съществуват две съпоставяния $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Ass}(X, \mathcal{F}_0)$, такива че $\gamma_1(x_i) \neq \gamma_2(x_i), \forall x_j \in X, j \neq i$ и $\gamma_1(x_j) = \gamma_2(x_j)$, като $A(\gamma_1, t) \neq A(\gamma_2, t)$, т.е. A спира изпълнението в различни състояния, когато работи върху t с γ_1 и с γ_2 .

Множеството от всички съществени входи за (t, A) ще означаваме с $\text{Ess}(t, A)$. Входните променливи от $\text{var}(t) \setminus \text{Ess}(t, A)$ се наричат *фиктивни* за (t, A) .

Теоретичните разработки в областта на автоматите работещи върху дървета намират своето практическо приложение в технологиите базирани на езиците от фамилията SGML и в частност XML.

XML е метаязык, дефиниращ правила за създаване на специализирани езици и синтаксис, на който те трябва да се подчиняват. Структурата на XML документите е йерархична и може да бъде представена с дърво. Всеки възел от дървото на документа оформя XML елемент. Почти всеки формат на данни може да бъде представен лесно в XML формат. Всъщност XML документите са текстови файлове, в които информацията на всеки елемент е ограничена с начални и крайни *тагове* (*етикети*). Допустимо е влягане на елементи, а също и добавяне на атрибути към тях.

Една от основните задачи, свързани с XML технологията е валидирането на XML документите. Всъщност, валидирането на един XML документ е разпознаване на дървото му от автомат. Document Type Definitions (DTD) е една от най-простите схеми за

валидиране на XML документи, която се използва в момента.

Резултати свързани с практическото приложение на XML и DTD като:

- ефективно извличане на данни от неструктурирани документи;
- автоматично генериране на програмен код от метаданни;
- създаване на декларативни езици

са публикувани от автора в [Da-Но;2003], [Da-Но;2004] и [Da;2005]

Отново, по аналогия с дискретни функции, ще доразвием понятието за съществена входна променлива за автомат, работещ върху дървета, като въведем понятието за силно съществени входове.

Определение 41 (48). Нека $t \in W_\tau(X)$, A е автомат, работещ върху дървета и нека $M \subseteq \text{Ess}(t, A)$, като $M \neq \emptyset$. Входната променлива $x_i \in M$ се нарича *силно съществена* за двойката (t, A) по отношение на множеството M , ако съществува $f_0 \in \mathcal{F}_0$, така че $M \setminus \{x_i\} \subseteq \text{Ess}(t(x_i \leftarrow f_0), A)$.

Теорема 27 (40). Нека $\text{Ess}(t, A) = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \neq \emptyset$, $Y_2 \neq \emptyset$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Ако съществува съпоставяне $\gamma \in \text{Ass}(Y_2, \mathcal{F}_0)$, такава че $Y_1 = \text{Ess}(\gamma(t), A)$, то съществува входна променлива $x_i \in Y_2$, която е силно съществена за (t, A) по отношение на множеството $\text{Ess}(t, A)$.

Следствие 27.1 (40.1). Нека $t \in W_\tau(X)$ е едно дърво от тип τ и нека A е автомат, работещ върху дървета. Ако $|\text{Ess}(t, A)| \geq 2$, то съществува поне един силно съществен вход за t по отношение на автомата A .

Следствие 27.2 (40.2). Нека $t \in W_\tau(X)$ и нека A е автомат работещ над дървета. Ако $|\text{Ess}(t, A)| \geq 2$ то t има поне два силно съществени входа по отношение на A .

Бързото развитие на компютърните технологии и най-вече на тези, които са базирани на XML, прави все по-интересна проблематиката, свързана с автоматите работещи върху дървета. Въз

основа на тях се изследват и създават средства за структурирани заявки в йерархични документи, трансформиране, валидиране и генериране на документи и др. В тази глава е направена връзката между структурните свойства на дискретните функции и свойствата на автоматите, работещи върху дървета. Аналогията между двете е подсилена с въведените понятия и доказаните теореми.

Заклучение

Структурните свойства са нестандартни мерки за сложност на дискретните функции. Влиянието на съществените и квазисъществените променливи върху сложността на реализация на булевите функции са предмет на изследване в продължение на десетилетия. Резултатите, получени в тази дисертация са чисто теоретични и авторът не претендира за възможност за пряко практическо приложение. В много области, предимно в интердисциплинарни такива, при компютърни симулации е от значение подборът на използваните функции. Именно в тази връзка получените резултати в дисертацията могат да намерят приложение. Резултатът от направеното изследване е частичното допълване на описанието на влиянието на множествата от променливи върху функциите, алгебрите и автоматите работещи върху дървета. Показан е универсалния характер на някои от резултатите в различни информационни структури и модели.

Авторска справка

Макар и разпределени в няколко посоки, научните и научно-приложните приноси могат да се обобщят както следва:

1. Разработен е пакет от приложни програми и софтуерни библиотеки за символно манипулиране с булеви функции, генериране и визуализиране на графите с определени свойства. С помощта на тези програми са изведени някои оценки за:

- броя на силно съществените променливи за булевите функции, обобщени в таблици 1 и 4.
 - броя на графи с определени свойства, обобщение в таблици 2 и 3. В приложение към дисертацията е даден списък на графите със седем върха отговарящи на необходимите условия НУ1-НУ6. Поради големият обем, пълен каталог на графите с не повече от 8 върха, отговарящи на необходимите условия да бъдат графи на дискретни функции по отношение на отделните им двойки е публикуван на адрес [http : //dispatcher.swu.bg/Graphs/](http://dispatcher.swu.bg/Graphs/)
2. Като е използвана друга декомпозиция, са дефинирани и са изучени квазификтивните променливи, квазисъществените и квази- силно съществените променливи за булевите функции. Понятията са надградени до квазиотделими множества от променливи. Изследвани са техните свойства, като са доказани редица теореми (Теореми 6, 9, 10, 11, 12, 13 и 14). Направен е паралел с вече доказани подобни свойства за силно съществените променливи и отделните множества от променливи.
 3. Изведена е връзката между свойства на променливите за булевите функции и структурата на редуцираните наредени диаграми за двоично решаване. Доказани са резултати, обвързващи конструирането на минимална диаграма и мястото на дистрибутивните променливи в реда на декомпозиция (Теореми 18 и 20).
 4. В търсене на спектъра на валидност на твърдението за минималния брой силно съществени променливи за дискретни функции, са въведени аналогични конструкции и са доказани аналогични твърдения за термове и дървета, с което е направено едно своеобразно обобщение (Теореми 26 и 27 и произтичащите от тях следствия).

Постигнатите резултати в дисертацията са докладвани на конференции и семинари, и са публикувани в научни издания.

Публикации по темата на дисертацията

[Da;2001] **Damyanov, I.**, *On Some Properties of Variables in Reed-Muller Decompositions* Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of 30th Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovets, 2001, 258-262

[Da-Sh;2002] **Damyanov, I.**, Sl. Shtrakov, *Essential Inputs and Minimal Tree Automata*, Proceedings of Sixth International Conference on Discrete Mathematics and Applications, Blagoevgrad, 2002.

Забелязани цитирания в:

— К. Chimev, Pl. Tchimev, *Separable and Dominating Sets of Variables for the Functions*, Second International Conference FMNS-2007, Blagoevgrad, 2007

— К. ЧИМЕВ, *Отделими множества от променливи на функциите*, Университетско издателство “Неофит Рилски” - ЮЗУ, 2005

— К. Chimev, Pl. Tchimev, *Structural Properties of the Functions*, Proceedings of Seventh International Conference on Discrete Mathematics and Applications, Blagoevgrad, 2005.

[Da-Ho;2003] **Damyanov, I.**, N. Holmes, *Effective Data Extraction With Schema-Driven Tools* Proceedings of Computer Science, Engineering and Applications, Vol. XIV, 2003, USA, 454-458.

[Da-Ho;2004] **Damyanov, I.**, N. Holmes, *Metadata Driven Code Generation Using .NET Framework* Proceedings of the International Conference on Computer Systems and Technologies - CompSysTech'2004, 2004, Rousse, IIIB.2-1-6

Забелязани цитирания в:

- Ahmed Arara, Salma Ali, *Metadata-driven Querying Tool for MS SQL Applications* , International Conference on Emerging Trends in Computer and Image Processing (ICETCIP'2011), 2011, Bangkok
- Pereira, João Gradim, *Improving variability of applications using adaptive object-models*, Universidade do Porto, 2011, Portugal
- [Da;2005] **Damyanov, I.**, *From Structure to Behavior - Defining Declarative Language Grammars with XML* , Proceedings of Seventh International Conference on Discrete Mathematics and Applications, Blagoevgrad, 2005.
- [Da;2011] **Damyanov, I.**, *On Some Properties of Boolean Functions and Their Binary Decision Diagrams* Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of 40th Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovets, 2011.
- [Da;2011b] **Damyanov, I.**, *On Some Properties of Quasi-Essential Variables of the Boolean Functions* Proceedings of Forth International Scientific Conference FMNS-2011, Blagoevgrad, 2011
- [Su-Da;2011] Sukalinska, M., **I. Damyanov**, *Class Library for Boolean Function Manipulation* Proceedings of Forth International Scientific Conference FMNS-2011, Blagoevgrad, 2011
- [Da;2012] **Damyanov, I.**, *Graphs, Satisfying Certain Conditions*, Proceedings of IV Balkan Scientific Conference The Science, the Education and the Art in 21st Century, Blagoevgrad, 2012

Благодарности

Приятно ми е да изкажа своята огромна благодарност към хората, които помогнаха настоящата дисертация да стане възможна и да придобие своя окончателен вид:

– Благодаря на моя научен ръководител доц.д-р Йордан Денев, който ме насочи към интересната проблематика и за неговата ценна подкрепа през годините като негов асистент и докторант.

– Искам специално да благодаря на проф.дмн Кирил Чимев, основател на Благоевградската школа по Дискретна математика.

– Специално искам да изкажа своята благодарност към доц.дмн Славчо Щраков, за ползотворните дискусии по проблемите на дисертацията и неговите съвети при подготовка на статиите, върху които тя бе оформена.

В заключение изказвам благодарност и на колегите от катедра Информатика и катедра Математика при ЮЗУ “Неофит Рилски” – доц.д-р Стефан Стефанов, доц.д-р Калчо Тодоров, доц.д-р Димитър Ковачев, проф.д-р Илия Гюдженев, проф.дпн Иван Мирчев и др., с които многократно сме дискутирали различни проблеми, засегнати в дисертацията. Искам да изкажа и благодарност и на проф. Клаус Денеке и проф. Йорг Копитц (Потсдамски университет) за полезното научно сътрудничество.

Библиография

- [Ak;1978] Akers, S.B., *Binary decision diagrams*, IEEE Trans. Comp., 27, 1978, 509–516
- [Bec-Dre;1995] Becker, B., R.Drechsler, *How many Decomposition Types do we need?*, IEEE European Design and Test Conference, Paris, 1995, 438-443
- [Bo-We;1996] Bollig, B., I. Wegener, *Improving the Variable Ordering of OBDDs is NP-Complete*, IEEE Transactions on Computers, (45), 1996, 993-1002
- [Be-Lh-Qi-He-Um;2003] Berndt, M. O. Lhoták, F. Qian, L. Hendren, N. Umanee, *Points-to Analysis using BDDs*, Proceedings of the ACM SIGPLAN 2003 Conference on Programming Language Design and Implementation, 2003, 103-114
- [Br;1986] Bryant, R.E., *Graph-based algorithms for Boolean function manipulation*, IEEE Trans. Comp. 35(8), 1986, 677–691
- [Br;1967] Брейтбарт, Ю.Я., *О существенных переменных функций алгебры логики*, Доклады АН СССР, 172, 1967, 9-10
- [Bu;1960] Büchi, J. R., *On a decision method in a restricted second order arithmetic*, In Stanford Univ. Press., editor, Proc. Internat. Congr. on Logic, Methodology and Philosophy of Science, 1960, 1–11
- [Ch;1967] Чимев, К., *Върху зависимостта на функциите от P_k от аргументите им*, Год. на ВТУЗ, Математика, т.IV, кн. 3, 1967, 5-13
- [Ch;1970] Чимев, К., *Върху зависимостта на функциите от k -значната логика от аргументите им*, Год. на ВТУЗ, Математика, т.VI, кн. 2, 1970, 53-62

- [Ch;1973] Чимев, К., *Върху подфункциите и силно съществените променливи на функциите*, Год. на ВТУЗ, Математика, т.IX, кн. 4, 1973, 43-55
- [Ch;1981] Chimev, K., *On some properties of functions*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 1981, 97-110
- [Ch;1982] Чимев, К., *Отделими множества от аргументи на функциите*, Благоевград, 1982
- [Ch;1984] Чимев, К. *Функции и графи*, Благоевград, 1984
- [Ch;1986] Chimev, K., *Separable Sets of Arguments of Functions*, МТА SzTAKI Tanulmanyok, 180/1986
- [Ch;1988] Чимев, К., *Зависимост на функциите от множества от техни аргументи*, Годишник на ВПИ, 5 (1), Благоевград, 1988
- [Ch;1991] Чимев, К., *Дискретни функции и подфункции*, Благоевград, 1991
- [Com-D-G-J-L-T-T;1999] Comon, H. M. Dauchet, R. Gilleron, F. Jacquemard, D. Lugiez, S. Tison, M. Tommasi, *Tree Automata, Techniques and Applications*, 1999, <http://www.grappa.univ-lille3.fr/tata/>
- [Co-Leh;2007] Couceiro, M., E. Lehtonen, *On the effect of variable identification on the essential arity of functions*, International Journal of Foundations of Computer Science, 18 (5), 2007, (DOI: 10.1142/S012905410700508X)
- [Co-Leh-Wal;2010] Couceiro, M., E. Lehtonen, T. Waldhauser, *Decompositions of functions based on arity gap*, (arXiv:1003.1294)
- [Dav;1966] Davies, R.O., *Two theorems on essential variables*, London Math., 1966, 331-335
- [Da;2001] Damyanov, I., *On Some Properties of Variables in Reed-Muller Decompositions*, Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of 30th Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovets, 2001, 258-262
- [Da;2005] Damyanov, I., *From Structure to Behavior - Defining Declarative Language Grammars with XML*, Proceedings of Seventh International Conference on Discrete Mathematics and Applications, Blagoevgrad, 2005.

- [Da;2011] Damyanov, I., *On Some Properties of Boolean Functions and Their Binary Decision Diagrams*, Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of 40th Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovets, 2011.
- [Da;2011b] Damyanov, I., *On Some Properties of Quasi-Essential Variables of the Boolean Functions*, Proceedings of Forth International Scientific Conference FMNS-2011, Blagoevgrad, 2011
- [Da;2012] Damyanov, I., *Graphs, Satisfying Certain Conditions*, Proceedings of IV Balkan Scientific Conference The Science, the Education and the Art in 21st Century, Blagoevgrad, 2012
- [Da-Ho;2003] Damyanov, I., N.Holmes, *Effective Data Extraction With Schema-Driven Tools* Proceedings of Computer Science, Engineering and Applications, Vol. XIV, 2003, USA, 454-458.
- [Da-Ho;2004] Damyanov, I., N.Holmes, *Metadata Driven Code Generation Using .NET Framework* Proceedings of the International Conference on Computer Systems and Technologies - CompSysTech'2004, 2004, Rouse, IIIB.2-1-6
- [Da-Sh;2002] Damyanov, I., Sl.Shtrakov, *Essential Inputs and Minimal Tree Automata*, Proceedings of Sixth International Conference on Discrete Mathematics and Applications, Blagoevgrad, 2002.
- [De;1978] Денев, Й.Д., *Върху едно обобщение на понятието подфункция*, Математика и математическо образование, Доклади на Четвъртата пролетна конференция на БМД, София, 1978, 98-104
- [De-G;1983] Denev, J., I. Gjundenov, *On Separable Sets Of Discrete Functions from P_k* , MTA SzTAKI, Tanulmanyok, 147, 1983, pp. 47-50
- [Dre-Th-Be;1994] Drechsler, R., M. Theobald, B. Becker, *Fast OFDD based minimization of fixed polarity reed-muller expressions*, European Design Automation Conference, 1994, pp. 2-7
- [Dre-Sa-Th-Be-Per;1994] Drechsler, R., A. Sarabi, M. Theobald, B. Becker, M.A. Perkowski, *Efficient Representation and Manipulation of Switching Functions Based on Ordered Kronecker Functional Decision Diagrams*, Design Automation Conference, 1994, pp. 415-419

- [Fr-Ni-Wi;2008] Friedel, M., Sv. Nikolayeva, Th. Wilhelm, *The Decomposition Tree for Analyses of Boolean Functions*, Mathematical Structures in Computer Science, 18, 2008, 411-426
- [Fu-Ma-Ka;1991] Fujita, M. Y. Matsunaga, T. Kakuda, *On Variable Ordering of Binary Decision Diagrams for the Application of Multi-Level Logic Synthesis*, in Proceedings of European Design Automation Conference, Amsterdam, 1991, 50-54
- [Ge-Me;1996] Gergov, J., Ch. Meinel, *Mod2-OBDDs: A Data Structure that Generalizes EXOR-Sum-of-Products and Ordered Binary Decision Diagrams*, Formal Methods in System Design, 8, 1996, 273-282
- [Gec-S;1984] Gécseg, F., M. Steinby, *Tree Automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984
- [G;1983] Гюдженев, Ил., *О выделяемых парах одного класса функций*, MTA SzTAKI, Tanulmányok, 147, 1983, pp. 51-59
- [Ka;2000] Kauffman, S., *Investigations*, Oxford University Press, 2000
- [Kl-Vr;2003] Klop, J. W., R. de Vrijer, *Term Rewriting Systems*, Cambridge University Press, 2003
- [Kov;2006] Kovachev, D., *On a Class of Discrete Functions*, Acta Cybernetica, 17 (3), Szeged, 2006, 513-519
- [Kov;2008] Kovachev, D., *On Some Generalizations of a Class of Discrete Functions*, Serdica Journal of Computing, 2 (4), Sofia, 2008, 313-320
- [Lee;1959] Lee, C.Y., *Representation of switching circuits by binary decision diagrams*, Bell Syst. Tech. Journal, 38, 1959, 985-999
- [Lup;1962] Лупанов, О.Б., *Об одном классе схем из функциональных элементов*, Проблемы кибернетики, 7, 1962, 61-114
- [Man;2005] Манев, Кр., *Увод в дискретната математика*, КЛИМН, 2004
- [Me-Sa-Sc;2002] Meinel, C., H. Sack, V. Schillings, *VisBDD - A Web-based Visualization Framework for OBDD Algorithms*, In Proceedings of IWLS, 2002, 385-390
- [Mir;1988] Mirchev, Iv., *Separable and Dominating Sets of Variables for the Functions*, East European Category Seminar Summaries, Prevala, 1988, 27-29

- [Mo;1982] Moret, B.M.E., *Decision trees and diagrams*, Comput. Surv., 14, 1982, 593–623
- [Ru;1993] Rudell, R., *Dinamic Variable Ordering for Ordering Binary Decisions*, in Proceedings of International Conference on Computer Aided Design, Santa Clara CA, 1993, 42-47
- [Sa;1963] Salomaa, A., *On Essential Variables of Functions, Especially in the Algebra of Logic*, Ann.Acad.Sci.Finn., ser.A, 333 (1963), 1-11
- [Sh;1984] Штраков, Сл., *Анулиращи множества от съществени променливи за функциите*, Годишник на ВПИ, Благоевград, т. I, кн. 1, 1984, 91-98
- [Sh;1987] Shtrakov, Sl., *Dominating and Anuling Sets of Variables for the Functions*, Blagoevgrad, 1987
- [Sh;1990] Штраков, Сл., *Отделимост и доминирваемост на множества от променливи за функцииите*, Втора международна конференция по дискретна математика и приложения, Благоевград, 1990, 63-72
- [Sh;2001] Shtrakov, Sl., *Tree automata and essential input variables*, Contributions to general algebra, 13, (Velké Karlovice, 1999/Dresden, 2000), Heyn, Klagenfurt, (2001), 309-319
- [Sh-Sh;2001] Shtrakov, Sl., Vl. Shtrakov, *Tree Automata and Separable Sets of Input Variables*, FILOMAT 2001, Nis, Yugoslavia, 2001, 61-69
- [Sh-De;2002] Shtrakov, Sl., K. Denecke, *Essential Variables and Separable Sets in Universal Algebra*, Multiple-Valued Logic, An International Journal 8/2, 2002, 165-181
- [Sh;2002] Shtrakov, Sl., *Tree Automata and Essential Subtrees*, Proceedings of Sixth International Conference on Discrete Mathematics and Applications, Blagoevgrad, 2002.
- [Sh;2008] Shtrakov, Sl., *Essential arity gap of Boolean functions*, Journal of Computing, Serdica vol.2 (3), 2008, pp. 249-266, Zbl 1170.06005, MR2489631 (2010c:06023) (arXiv:0808.3892).
- [Sh;2009] Shtrakov, Sl., *Essential variables and positions in terms*, Algebra Universalis, Vol. 61 (3-4), 2009, 381-397
- [Sh-Ko;2010] Shtrakov, Sl., J. Koppitz, *Symmetric functions with non-trivial arity gap*, Journal of Algebra and Discrete Mathematics, 2010, (arXiv:1009.4828)

- [Sh-Ko;2010b] Shtrakov, Sl., J. Koppitz, *On finite functions with non-trivial arity gap*, *Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications*, vol.30, 2010, pp. 217-245 (arxiv:0810.2279).
- [S-W;1993] Sieling, D., I. Wegener, *Reduction of OBDDs in Linear Time*, *Information Processing Letters*, 48, 1993, 139–144
- [Sol;1963] Соловьев, Н., *К вопросу о существенной зависимости функции алгебры логики*, *Проблемы кибернетики*, вып. 9, 1963, 333-335.
- [Su-Da;2011] Sukalinska, M., I. Damyanov, *Class Library for Boolean Function Manipulation*, *Proceedings of Forth International Scientific Conference FMNS-2011*, Blagoevgrad, 2011
- [Wa;1995] Wang, Y., *PhD Thesis - DataStructures, Minimization and Complexity of Boolean Functions*, University of Saskatchewan, Canada, 1995
- [Wa-Mc-So;2001] Wang, Y., C.McCrosky, X.Song, *Single-Faced Boolean Functions and their Minimization*, *The Computer Journal*, vol 44 (4), 2001, 280-291.
- [Wha-La;2004] Whaley, J., M. Lam, *Cloning-based context-sensitive pointer alias analysis using binary decision diagrams*, *Proceedings of the ACM SIGPLAN 2004 conference on Programming language design and implementation*, 2004, 131-144.
- [W3ORG] World Wide Web Consortium
<http://www.w3.org/standards/xml/>