

РЕЦЕНЗИЯ

По дисертационния труд „Функционалната система Γ_{B_s}

и някои нейни приложения“

за придобиване на образователна и научна степен „Доктор“

област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика,

Професионално направление: 4.5 Математика (Математически анализ)

Автор: Елми Шабани

Изготвил рецензията: проф. дмн Андрей Борисов Андреев

1. Актуалност на темата

Теорията на равномерно разпределените редици възниква в началото на XX век и се базира на функционални пространства от експоненциален вид. Тя става важна част от теорията на числата с приложения във функционалния анализ. В края на миналия век се наблюдава бурно развитие на тази теория с многобройни приложения в различни научни области. Това развитие до голяма степен се дължи на използването на многомерни (s -мерни) Канторови системи B_s с променливи базиси. Те служат за конструиране на съответната функционална система. На такава функционална система и нейни приложения е посветена представената дисертация.

Актуалността на изследванията се обуславя от поне следните съображения:

- С развитието на компютърните пресмятания качеството на разпределение на математически структури и обекти играе все по-голяма роля. Така например при числено пресмятане на многомерни интеграли, които възникват в атомната физика или биоматематиката, решаваща роля има разположението на интеграционните възли;

- Разпределението на редици и мрежи качествено се изразява чрез оценки на специални мерки. Такива класически мерки са дискрепансът и диафонията, които са оценки за неравномерност. При дискретизация на (многомерни) области и обработка на огромно количество данни понятието квазиравномерност играе много съществена роля.

Считам, че тематиката на дисертационния труд е безспорно актуална.

2. Общо описание на представените материали

Представеният дисертационен труд е структуриран с увод, три глави, заключение, авторските виждания за научните приноси, списък на публикациите, свързани с дисертационния труд и библиография, в която са цитирани 67 източника.. Общият обем на дисертацията е 190 страници. Очевидно е, че авторът е запознат със съвременното състояние на разглежданата проблематика.

Авторефератът в обем от 39 страници и е написан (само) на английски език. Той отразява коректно съдържанието на дисертационния труд.

Освен дисертационния труд и автореферата, към документите на Елми Шабани са включени още автобиография и две авторски статии, върху които е построена дисертацията. Статиите са написани и публикувани съвместно с научния му ръководител. Едната от тях е с импакт-фактор.

3. Научни и научно-приложни приноси в дисертационния труд

Основните приноси в дисертацията на Елми Шабани са в теорията и приложенията на математическия анализ и аналитичната теория на числата. Целта на работата може да се резюмира по следния начин: Да се конструира функционално пространство Γ_{B_s} и да се изучат свойствата и връзката им с равномерно разпределените редици. Най-важното приложение е свързано с квази-Монте-Карло интегрирането в s -мерния куб. За доказателствата на формулираните твърдения са необходими задълбочени математически познания, както и разнообразна техника.

Ще се спра по-подробно на приносите в дисертационния труд.

Глава първа има спомагателен характер. Тук се разглеждат пълни ортонормирани системи, които се конструират чрез Канторови числови системи. Такива са например

функциите на Уолш, на Виленкин и много други. На такъв тип функционално пространство е посветен и представения дисертационен труд.

В тази глава подробно се описва появата и развитието на функционалното пространство Γ_{B_s} . Представени са необходимите за по-нататъшно изследване понятия и дефиниции. Дадени са важни факти от теорията на равномерно разпределените редици (параграф 1.4), както и често използвания в следващите глави интегрален критерий на Вайл за равномерна разпределеност.

В **Глава втора** се представят резултати за връзката между функциите от Γ_{B_s} и теорията на равномерно разпределените редици. За целта е дефиниран многомерен модифициран интеграл от B_s -ични функции. Показани са приложения на тези интеграли в количествената и качествената теория на равномерно разпределените редици. В тази глава бих могъл да отлича следните четири приноса:

- Чрез въведена нова техника се доказва неравенството на Льовек (Теорема 2.1). Това неравенство дава оценка отгоре на екстремалния дискрепанс на произволна едномерна мрежа в термините на модифицираните интеграли;
- Доказана е формулата на Коксма, която представя квадратичния дискрепанс на s -мерна мрежа в термините на модифицираните интеграли от B_s -ичните функции (Теорема 2.2);
- Основният резултат във втора глава е неравенството на Ердьош-Туран-Коксма. Той оценява квадратичния дискрепанс на произволна s -мерна мрежа чрез крайна сума от въведените модифицирани интеграли и остатъчен член, на който е направена нетривиална оценка отгоре (Теорема 2.3);
- Накрая е доказано едно ново необходимо и достатъчно условие за равномерност на редица. Това е една модификация на интегралния критерий на Вайл.

Изобщо в цялата втора глава се съдържат ясни приложения на функции от Γ_{B_s} в теорията на равномерно разпределените редици и мрежи.

В **Глава трета** са направени редица приложения на B_s -ичните функции в теорията и практиката на квази-Монте-Карло интегрирането в теглови Хилбертови пространства. В тези пространства средноквадратичната грешка на интегрирането се основава на използването на B_s -ичната аритметика, развита в първа глава на дисертацията. Използвана е

общата конструкция на два класа Соболеви пространства. Това са така наречените незакотвени и закотвени теглови Соболеви пространства. И в двата случая са изведени формули в явен вид за средноквадратичната грешка при интегриране в тези пространства.

Така получените резултати за квази-Монте-Карло интегриране са мотивирали автора да дефинира два нови типа диафония. Това са незакотвена и закотвена теглова диафония. Доказано е, че тези диафонии са количествени мерки за неравномерността на разпределението на редици.

Основен принос в тази глава е, според мен, че се дава явна връзка между средноквадратичната грешка на интегриране в двата типа Соболеви пространства и новите типове на диафонията.

Накрая бих искал да подчертая, че авторът на дисертационния труд е преодолял някои сериозни технически трудности и е демонстрирал добро познаване на съвременните тенденции в областта на разпределението на редици и мрежи. Претенциите му за приносите, изложени в края на дисертационния труд, са реалистични.

4. Публикации по дисертационния труд

Докторантът има две публикации по дисертационния труд, съвместни с научния ръководител. Те отразяват доста пълно съдържанието на Глава 2 и Глава 3. Една от статиите е с импакт-фактор.

5. Преценка на автореферата

Авторефератът буквално повтаря структурата на дисертационния труд. Той правилно отразява основните положения и научните приноси на дисертационния труд. Не мога да не подчертая, че е написан много нетрадиционно, като само преписва резултатите и не може да се разглежда като отделен самостоятелен научен документ. Би било добре да има и автореферат, написан на български език.

6. Лични впечатления

Не познавам лично автора на дисертационния труд. Единствено известно ми е, че цялата му досегашна професионална дейност е свързана с математиката. Познавам работите и на други докторанти на доц. Васил Грозданов и мога отговорно да твърдя, че той е изградил добра научна школа в областта на математическия анализ с резултати, получили световно признание.

7. Критични бележки и препоръки

На предварителната защита бяха отправени несъщаствени забележки, които са взети предвид от докторанта. От документите, които ми бяха представени, не е видно дали Елми Шабани е участвал в научни конференции и семинари. Бих препоръчал тази апробационна дейност да залегне като важна част от научната му работа. Считам също, че кандидатът има капацитет да засили своята публикационна дейност.

8. Заключение

Предвид гореизложеното може да се направи изводът, че представеният дисертационен труд „Функционалната система Γ_{B_s} и някои нейни приложения“ напълно удовлетворява изискванията на ЗРАСРБ и Правилника за приложение на ЗРАСРБ, както и специфичните изисквания на Югозападен университет „Неофит Рилски” – Благоевград. Затова моето мнение е „ЗА“ и убедено препоръчвам на научното жури да предложи **да бъде присъдена** на Елми Шабани образователна и научна степен „Доктор“ в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика, Професионално направление: 4.5 Математика (Математически анализ).

10. 11. 2025 г.

Габрово

Рецензент:

/проф. дмн А.Б. Андреев/

REVIEW

On the dissertation thesis "The Functional System Γ_{B_s}

and Some of Its Applications "

for the acquisition of the educational and scientific degree "Doctor"

Field of higher education: 4. Natural Sciences, Mathematics, and Informatics,

Professional field: 4.5 Mathematics (Mathematical Analysis)

Author: Elmi Shabani

Reviewed by: Prof. Andrey Borisov Andreev, DSc

1. Relevance of the topic

The theory of uniformly distributed sequences emerged at the beginning of the 20th century and is based on functional spaces of exponential type. It became an important part of number theory with applications in functional analysis. At the end of the last century, this theory underwent rapid development with numerous applications in various scientific fields. This development is largely due to the use of multidimensional (s-dimensional) Cantor systems B_s with variable bases. They serve to construct the corresponding functional system. The presented dissertation is devoted to such a functional system and its applications.

The relevance of the research is determined by at least the following considerations:

- With the development of computer calculations, the quality of the distribution of mathematical structures and objects plays an increasingly important role. For example, in the numerical calculation of multidimensional integrals that arise in atomic physics or biomathematics, the location of the integration nodes plays a crucial role;

- The distribution of sequences and nets is qualitatively expressed by estimates of special measures. Such classical measures are discrepancy and diaphony, which are estimates of nonuniformity. In the discretization of (multidimensional) areas and the processing of huge amounts of data, the concept of quasi-uniformity plays a very important role.

I believe that the topic of the dissertation is undoubtedly relevant.

2. General description of the materials presented

The dissertation is structured with an introduction, three chapters, a conclusion, the author's views on scientific contributions, a list of publications related to the dissertation, and a bibliography citing 67 sources. The total volume of the dissertation is 190 pages. It is evident that the author is familiar with the current state of the issue under consideration.

The abstract is 39 pages long and is written (only) in English. It accurately reflects the content of the dissertation.

In addition to the dissertation and the abstract, Elmi Shabani's documents also include a CV and two papers by the author on which the dissertation is based. The articles were written and published jointly with his academic supervisor. One of them has an impact factor.

3. Scientific and applied scientific contributions in the dissertation

The main contributions in Elmi Shabani's dissertation are in the theory and applications of mathematical analysis and analytical number theory. The aim of the work can be summarized as follows: To construct a functional space Γ_{B_s} and to study its properties and their connection with uniformly distributed sequences. The most important application is related to quasi-Monte Carlo integration in the s -dimensional cube. Proving the formulated statements requires in-depth mathematical knowledge and a variety of techniques.

I will discuss the contributions in the dissertation in more detail.

Chapter 1 is of an auxiliary nature. It examines complete orthonormal systems constructed using Cantor number systems. Examples include Walsh functions, Vilenkin functions, and many others. The presented dissertation is also devoted to this type of functional space.

This chapter describes in detail the emergence and development of the functional space Γ_{B_s} . The concepts and definitions necessary for further research are presented. Important facts from the theory of uniformly distributed sequences (paragraph 1.4) are given, as well as Wayl's integral criterion for uniform distribution, which is frequently used in the following chapters.

Chapter 2 presents results on the connection between functions from Γ_{B_s} and the theory of uniformly distributed sequences. For this purpose, a multidimensional modified integral of B_s -functions is defined. Applications of these integrals in the quantitative and qualitative theory of uniformly distributed sequences are shown. In this chapter, I could distinguish the following four contributions:

- A new technique is introduced to prove the Le Veque inequality (Theorem 2.1). This inequality gives an upper bound on the extreme discrepancy of an arbitrary one-dimensional net in terms of modified integrals.
- The Koksma formula, which represents the quadratic discrepancy of an s -dimensional net in terms of modified integrals of B_s -functions, is proven (Theorem 2.2);
- The main result in Chapter 2 is the Erdős–Turan–Koksma inequality. It estimates the quadratic discrepancy of an arbitrary s -dimensional net by a finite sum of the introduced modified integrals and a residual term, for which a non-trivial upper bound is given (Theorem 2.3);
- Finally, a new necessary and sufficient condition for the uniformity of a sequence is proved. This is a modification of Wayl's integral criterion.

In general, the entire second chapter contains clear applications of functions from Γ_{B_s} in the theory of uniformly distributed sequences and nets.

Chapter 3 presents different applications of B_s -functions in the theory and application of quasi-Monte Carlo integration in weighted Hilbert spaces. In these spaces, the mean square error of integration is based on the use of B_s arithmetic, developed in the first chapter of the dissertation. The general construction of two classes of Sobolev spaces is used. These are the so-called unanchored and anchored weighted Sobolev spaces. In both cases, explicit formulas are derived for the mean square error in integration in these spaces.

The results obtained for quasi-Monte Carlo integration motivated the author to define two new types of diaphony. These are unanchored and anchored weighted diaphony. It has been proven that these diaphonies are quantitative measures of the non-uniformity of the distribution of sequences.

In my opinion, the main contribution of this chapter is that it establishes a clear relation between the mean square error of integration in the two types of Sobolev spaces and the new types of diaphony.

Finally, I would like to emphasize that the author of the dissertation has overcome some serious technical difficulties and has demonstrated a good knowledge of contemporary trends in the field of sequence distribution and nets. His claims for the contributions set out at the end of the dissertation are realistic.

4. Publications related to the dissertation

The PhD student has got two publications related to the dissertation, co-authored with the scientific supervisor. They reflect quite comprehensively the content of Chapter 2 and Chapter 3. One of the papers has an impact factor.

5. Assessment of the abstract

The abstract literally repeats the structure of the dissertation. It correctly reflects the main points and scientific contributions of the dissertation. I must emphasize that it is written in a very unconventional manner, merely copying the results, and cannot be considered a separate, independent scientific document. It would be good to have an abstract written in Bulgarian.

6. Personal impressions

I do not know the author of the dissertation personally. All I know is that his entire professional career to date has been related to mathematics. I am familiar with the work of other doctoral students of Assoc. Prof. Vasil Grozdanov, and I can confidently say that he has established a strong scientific school in the field of mathematical analysis with results that have gained worldwide recognition.

7. Critical remarks and recommendations

During the preliminary defense, minor comments were made, which were taken into account by the PhD student. From the documents presented to me, it is not clear whether Elmi Shabani has participated in scientific conferences and seminars. I would recommend that this approval activity

be included as an important part of his scientific work. I also believe that the candidate has the capacity to strengthen his publication activity.

8. Conclusion

In view of the above, it can be concluded that the presented dissertation thesis "The Functional System Γ_{B_s} and Some of Its Applications" fully meets the requirements of the ZRASRB and the Regulations for the Application of the ZRASRB, as well as the specific requirements of South-West University "Neofit Rilski" – Blagoevgrad. Therefore, my opinion is **POSITIVE** and I strongly recommend that the scientific jury propose that Elmi Shabani **be awarded** the educational and scientific degree of "Doctor" in the field of higher education: 4. Natural Sciences, Mathematics, and Informatics, Professional Field: 4.5 Mathematics (Mathematical Analysis).

10. 11. 2025 r.
Gabrovo

Reviewer:
/Prof. DSc A.B. Andreev/