

РЕЦЕНЗИЯ

от проф. д.н. Иван Томов ДИМОВ, Институт по Информационни и комуникационни технологии - БАН на дисертационния труд на Елми Шабани, докторант в самостоятелна форма на обучение за придобиване на образователната и научната степен „доктор“ по докторантска програма “Математически анализ”, професионално направление 4.5. Математика, област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатиката на тема:

*“Функционалната система ГВ и някои от нейните приложения”
 (“THE FUNCTION SYSTEM ГВ AND SOME OF ITS APPLICATIONS”)*

Съгласно заповед No 2193/30.09.2025 г. на Ректора на Югозападен университет “Неофит Рилски”-Благоевград, проф. д-р Николай Марин съм определен за член на научното жури във връзка с процедурата за придобиване на образователната и научната степен „доктор“ по професионално направление 4.5. Математика, област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатиката от Елми Шабани. На заседание на научното жури от 08.10.2025 г. бях определен за рецензент.

1. Общо описание на материалите на дисертацията

Дисертацията на г-н Шабани е във важна област на математическия анализ, която има много важни приложения теорията на равномерно разпределените редици, както и в методите за интегриране на функции на много променливи. Тази част от математическия анализ има важно значение за природните науки, свързани с изследване на сложни физични и биологични системи.

При оценка на дисертационния труд, определящи са условията на Закона за развитието на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилникът за прилагането му (Постановление No 202 от 10.09.2010, измененията и допълненията му ДВ. бр. 15 от 19.02.2019), както и ВЪТРЕШНИ-

те ПРАВИЛА ЗА РАЗВИТИЕ НА АКАДЕМИЧНИЯ СЪСТАВ В ЮЗУ „НЕОФИТ РИЛСКИ“.

Представеният дисертационен труд е представен в обем от 189 стандартни страници. Дисертацията съдържа Увод, три грави, приноси на автора, списък с публикациите на автора, свързани с дисертацията и цитирана литература.

Глава първа има помощен характер за дисертацията. Тук са дефинирани и показани свойствата на три ортонормирани функционални системи – тези на Уолш функциите при основа b , функциите на Виленкин и $\{\mathcal{B}_s\}$ -ичните функции, конструирани в Канторови системи. Основна за дисертацията е $\Gamma_{\{\mathcal{B}_s\}}$ функционалната система. В другите две глави, където са представени основните резултати на дисертацията, тя е използвана като инструмент за теоретичното изследване на разглежданите научни проблеми. Тук е дефинирана $\{\mathcal{B}_s\}$ -ичната аритметика и са показани свойствата на функциите от $\Gamma_{\{\mathcal{B}_s\}}$ системата по отношение на нея. Тази аритметика е послужила за основа за дефинираното понятие средно квадратична грешка на интегрирането в Хилбертови пространства. В тази глава са представени някои понятия и твърдения от теорията на равномерно разпределените редици. Дадено е основното определение за това една редица да бъде равномерно разпределена, показани са интегралния и експоненциалния критерий на Вайл. Дефинирани са някои количествени характеристики за неравномерността на разпределението на редицир които след това са теоретично изследвани във втора глава на дисертацията.

В Глава втора на дисертацията авторът дефинира понятието многомерен модифициран интеграл от $\{\mathcal{B}_s\}$ -ичните функции и са представени редица приложения на тези интеграли в количествената и качествената теория на равномерно разпределените редици.

Неравенството на Льовек е една оценка отгоре на екстремалния дискрепанс на произволна едномерна мрежа в термините на въведените модифицирани интеграли от $\{\mathcal{B}_s\}$ -ичните функции. До сега не е известен

многомерен аналог на това неравенство. И в този смисъл, само неравенството на Льовек, свързано с едномерни редици, е било възможно да се представи.

Формулата на Коксма представлява представяне на квадратичния дискрепанс на произволна s -мерна мрежа в термините на модифицираните интеграли от $\mathcal{B}_s$ -ичните функции. То след това е използвано за доказване на неравенството на Ердьош-Туран-Коксма.

Неравенството на Ердьош-Туран-Коксма е класически резултат на количествената теория на равномерно разпределените редици. В дисертационния труд неравенство на Ердьош-Туран-Коксма представлява оценка отгоре на квадратичния дискрепанс на произволна s -мерна мрежа в термините на въведените модифицирани интеграли от $\mathcal{B}_s$ -ичните функции. В това неравенство сумирането е извършено над крайни суми от тези интеграли. Направена е оценка отгоре на остатъчния член, който се получава от замяната на безкрайната с крайна сума.

Интегралният критерий на Вайл е резултат от качествената теория на равномерно разпределените редици. Той представлява едно ново необходимо и достатъчно условие, за това една редица да бъде равномерно разпределена.

В глава трета, $\mathcal{B}_s$ -ичните функции са използвани за решаване на задачи, свързани с квази-Монте Карло интегрирането в теглови Хилбертови пространства. Като се използва развитата $\mathcal{B}_s$ -ична аритметика, е въведено понятието средно квадратична грешка на интегрирането в Хилбертови пространства. Разгледани са два класически примера на теглови Соболеви пространства – т. н. незакотвени и закотвени Соболеви пространства. Това са добре известни в литературата функционални пространства. В дисертационния труд $\mathcal{B}_s$ -ичните функции са използвани за изследването на средно квадратична грешка на интегрирането в тези пространства. Показани са формули в явен вид за нея в термините на тригонометричните функции от тези функции.

Като се използват резултатите, получени за средно квадратична грешка на интегрирането в тези пространства, са дефинирани два нови типа на диафонията – т. н. “anchored” (закотвена) and anchored weighted diaphony. Най-важният резултат е че е показано, че тези два нови типа на диафонията са количествени мерки за неравномерността на разпределението на редици.

В тази глава на дисертацията средно квадратична грешка на интегрирането в двата типа Соболеви пространства и новите типове на диафонията - unanchored and anchored weighted diaphony са свързани помежду си.

Авторефератът правилно отразява основните резултати, получени в дисертацията. Дисертацията и авторефератът са добре оформени и правилно структурирани.

Приносите в дисертацията са формулирани ясно и на добро професионално ниво.

Заключение: Като се вземе под внимание представените резултати на дисертацията могат да се направят следните **изводи:**

Предоставеният дисертационен труд, публикациите на автора и формулираните приноси имат всички достойнства и считам, че съответстват на напълно на изискванията за придобиване на научна степен „доктор“ съгласно Закона за научните степени и научните звания в Република България.

Давам **положителна оценка** на дисертационния труд и предлагам да бъде стартирана процедура за присъждане на образователната и научна степен “доктор” на Елми Шабани, докторант на самостоятелна подготовка по Математически анализ в катедра „Математика и Физика“ на ЮЗУ „Неофит Рилски“ - Благоевград.

28.10.2025

София

Подпис:

/проф. д.н. Иван Димов/

REVIEW

by Prof. Dr. Ivan Tomov DIMOV, Institute of Information and Communication Technologies - BAS of the dissertation work of Mr. Elmi Shabani, doctoral student in an independent form of study for acquiring the educational and scientific degree "doctor" in the doctoral program "Mathematical Analysis", professional field 4.5. Mathematics, field of higher education 4. Natural sciences, mathematics and informatics on the topic:

“THE FUNCTION SYSTEM ΓB AND SOME OF ITS APPLICATIONS“

According to Order No. 2193/30.09.2025 of the Rector of the South-West University “Neofit Rilski”-Blagoevgrad, Prof. Dr. Nikolay Marin, I have been appointed as a member of the scientific jury in connection with the procedure for acquiring the educational and scientific degree “doctor” in professional field 4.5. Mathematics, field of higher education 4. Natural sciences, mathematics and informatics by Elmi Shabani. At a meeting of the scientific jury on 08.10.2025, I was appointed as a reviewer.

1. General description of the materials of the dissertation

Mr. Shabani's dissertation is in an important area of mathematical analysis, which has very important applications in the theory of uniformly distributed series, as well as in methods for integrating functions of many variables. This part of mathematical analysis is of great importance for the natural sciences related to the study of complex physical and biological systems.

When evaluating the dissertation, the conditions of the Law on the Development of the Academic Staff in the Republic of Bulgaria (ZRASRB), the Regulations for its implementation (Decree No. 202 of 10.09.2010, its amendments and supplements SG. No. 15 of 19.02.2019), as well as the INTERNAL RULES FOR THE DEVELOPMENT OF THE ACADEMIC STAFF IN THE SWU "NEOPHYT RILSKI" are decisive.

The presented dissertation is presented in a volume of 189 standard pages. The dissertation contains an Introduction, three appendices, contributions of the author, a list of the author's publications related to the dissertation and cited literature.

Chapter one is of an auxiliary nature for the dissertation. Here the properties of three orthonormal functional systems are defined and shown – those of the Walsh functions in basis b , the Vilenkin functions and the $\{\mathcal{B}\}_s$ -ish functions constructed in Cantor systems. The $\Gamma_{\{\mathcal{B}\}_s}$ functional system is the basis for the dissertation. In the other two chapters, where the main results of the dissertation are presented, it is used as a tool for the theoretical study of the scientific problems under consideration. Here the $\{\mathcal{B}\}_s$ -ish arithmetic is defined and the properties of the functions from the $\Gamma_{\{\mathcal{B}\}_s}$ system with respect to it are shown. This arithmetic served as the basis for the defined concept of the mean square error of integration in Hilbert spaces. This chapter presents some concepts and statements from the theory of uniformly distributed series. The basic definition of a series being uniformly distributed is given, the integral and exponential Weyl criteria are shown. Some quantitative characteristics of the non-uniformity of the distribution of a series are defined, which are then theoretically investigated in the second chapter of the dissertation.

In Chapter Two of the dissertation, the author defines the concept of a multidimensional modified integral of $\{\mathcal{B}\}_s$ -s functions and presents a number of applications of these integrals in the quantitative and qualitative theory of uniformly distributed series.

Löweck's inequality is an upper bound on the extremal discrepancy of an arbitrary one-dimensional network in terms of the introduced modified integrals of $\{\mathcal{B}\}_s$ -dimensional functions. Up to now, no multidimensional analogue of this inequality is known. And in this sense, only Löweck's inequality related to one-dimensional series has been possible to represent.

The Koksma formula is a representation of the quadratic discrepancy of an arbitrary s -dimensional network in terms of the modified integrals of $\mathcal{B}_s$ -dimensional functions. It was then used to prove the Erdős-Turan-Koksma inequality.

The Erdős-Turan-Koksma inequality is a classical result of the quantitative theory of uniformly distributed series. In the dissertation, the Erdős-Turan-Koksma inequality is an upper bound on the quadratic discrepancy of an arbitrary s -dimensional network in terms of the introduced modified integrals of $\mathcal{B}_s$ -dimensional functions. In this inequality, the summation is performed over finite sums of these integrals. An upper bound is made on the remainder term, which is obtained by replacing the infinite with a finite sum.

The Weyl integral criterion is a result of the qualitative theory of uniformly distributed series. It represents a new necessary and sufficient condition for a series to be uniformly distributed.

In chapter three, $\mathcal{B}_s$ -dimensional functions are used to solve problems related to quasi-Monte Carlo integration in weighted Hilbert spaces. Using the developed $\mathcal{B}_s$ -dimensional arithmetic, the concept of the mean square error of integration in Hilbert spaces is introduced. Two classical examples of weighted Sobol spaces are considered – the so-called unanchored and anchored Sobol spaces. These are well-known functional spaces in the literature. In the dissertation $\mathcal{B}_s$ -functions are used to investigate the mean square error of integration in these spaces. Explicit formulas for it are shown in terms of the trigonometric functions of these functions.

Using the results obtained for the mean square error of integration in these spaces, two new types of crosstalk are defined – the so-called “anchored” (anchored) and anchored weighted diaphony. The most important result is that it is shown that these two new

types of crosstalk are quantitative measures of the unevenness of the distribution of ranks.

In this chapter of the dissertation, the mean square error of integration in both types of Sobol spaces and the new types of crosstalk - unanchored and anchored weighted diaphony are related to each other.

The abstract correctly reflects the main results obtained in the dissertation. The dissertation and the abstract are well-formed and properly structured.

The contributions in the dissertation are formulated clearly and at a good professional level.

Conclusion: Taking into account the presented results of the dissertation, the following conclusions can be drawn:

The submitted dissertation work, the author's publications and the formulated contributions have all the merits and I believe that they fully comply with the requirements for acquiring the scientific degree "doctor" according to the Law on Scientific Degrees and Scientific Titles in the Republic of Bulgaria.

I give a **positive** assessment of the dissertation work and propose to start a procedure for awarding the educational and scientific degree "doctor" to Elmi Shabani, a doctoral student of independent preparation in Mathematical Analysis at the Department of "Mathematics and Physics" of the South-West University "Neofit Rilski" - Blagoevgrad.

28.10.2025

Sofia

Signature:

/prof. Dr. Ivan Dimov/