

Югозападен университет „Неофит Рилски“

СТАНОВИЩЕ

на проф. д-р Тодор Димитров Тодоров
за дисертационен труд на тема
Функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ и някои нейни приложения
представен за придобиване на образователната и научна степен
"Доктор" в област на висше образование 4. Природни науки,
математика и информатика, професионално направление
4.5. Математика, научна специалност „Математически анализ“
Автор: Елми Шабани от Университет “Хаджи Зека”, гр. Пея,
Косово.

1. Актуалност и приложимост на темата

Настоящата дисертация е посветена на количествената теория на равномерно разпределените редици. Разработени са приложения в областта на приближеното пресмятане на интеграли. Освен в интегралното смятане равномерно разпределените редици намират приложение при обучение на невронни мрежи, безмрежови методи за решаване на елиптични частни диференциални уравнения, в областта на компютърното зрение и много други области на математиката и техниката. Дисертация се опира на изследвания и резултати получени след 2020 година, което я прави особено актуална. Получените оценки на грешката от интегриране са особено важни от практическа гледна точка.

2. Общо описание на представените материали

Във връзка с тази процедура получих следните документи: дисертация в обем на 189 стр., автореферат в обем на 41 стр., автобиография и 2 броя статии:

1 статия в списание „Доклади на БАН“;

1 статия в Годишник на Софийския университет „Св. Климент Охридски“.

Първата статия е вече публикувана, а втората е приета за печат. Първата публикация на кандидатът е публикувана в списание, което се реферира в кuartил 4 на Web of Science. Не са ми известни цитати на публикациите на кандидата.

Дисертацията съдържа 3 глави, като в първата са посочени дефиниции, свойства и известни резултати, върху които са изградени новите теоретични резултати на кандидата. Във втора глава се въвежда понятието многомерен модифициран интеграл. Въз основа на това понятие се доказват класическото неравенство на Льовек, формулата на Коксма, неравенството на Ердьош-Туран-Коксма и интегралния критерий на Вайл. В трета глава се дефинират закотвени и незакотвени Соболеви пространства и теглови

диафонии в тях. Описва се връзката между средноквадратичната грешка от интегриране и съответната теглова диафония. Дисертацията се опира на 65 цитирани източника.

3. Методика на изследването

Изследването е проведено със средствата на математическият анализ и функционалният анализ. Използвани са апроксимационни подходи и приблизително пресмятане на интеграли в Хилбертови пространства, закотвени и незакотвени Соболеви пространства.

4. Научни приноси на дисертацията

Авторът декларира приноси разположени в шест групи. Авторът въвежда нови математически структури чрез понятието многомерни модифицирани интеграли в системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. Чрез дефинираните модифицирани интеграли са доказани класическите неравенства на Льовек, Коксма и Ердьош-Туран-Коксма. Като е използвана аритметика във функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ критерият на Вайл за равномерно разпределена редица е представен в интегрална форма чрез разработените модифицирани интеграли. В дисертацията се прави заключение, че в общият случай грешката от интегриране в Соболеви пространства не зависи от диафонията. Това мотивира автора да въведе понятията закотвено Соболево пространство и средно квадратична грешка от интегриране. Смятам, че основният резултат в тази дисертация е формулиран в теорема 3.7 където в явен вид се представя връзката между грешката от интегриране в закотвени Соболеви пространства и съответната закотвена теглова диафония. Аналогични резултати са постигнати в незакотвени Соболеви пространства. Авторът на дисертацията Елми Шабани представя научен труд на високо ниво и претенциите му за декларираните приноси са основателни.

5. Оценка на личния принос на кандидата

Представените статии от Елми Шабани са в съавторство с научният му ръководител доц. дн Васил Грозданов. Смятам, че Елми Шабани има пълноценно участие при получаване на описаните резултати.

6. Критични бележки

Нямам критични бележки.

7. Заключение

Представеният дисертационен труд съдържа нови и значими научни резултати, които директно могат да се приложат в инженерната практика. Той отговаря на всички критерии и показатели за придобиване на научна степен "Доктор", съгласно Закона за развитие на академичния състав в

Република България, Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и Вътрешните правила за развитие на Академичния състав в Югозападен университет "Неофит Рилски".

Уверено давам положителна оценка на дисертационния труд „Функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ и някои нейни приложения” разработен от Елми Шабани и препоръчвам на научното жури да присъди на Елми Шабани образователната и научната степен „Доктор” в област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 „Математика“, научна специалност „Математически анализ“.

10.11.2025г
Габрово

Член на журито:
проф. д-р Тодор Тодоров

South-West University "Neofit Rilski"

OPINION

by Prof. Dr. Todor Dimitrov Todorov on PhD thesis The functional system $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ and some of its applications submitted for the acquisition of the educational and scientific degree "Doctor" in the field of higher education 4. Natural Sciences, Mathematics and Informatics, professional field 4.5. Mathematics, scientific specialty "Mathematical Analysis".

Author: Elmi Shabani from the University "Haxhi Zeka", Peja, Kosovo.

1. Relevance and applicability of the topic

This dissertation is devoted to the quantitative theory of uniformly distributed sequences. Applications in the field of approximate integral calculation have been developed. In addition to integral calculus, uniformly distributed sequences have been used in training neural networks, meshfree methods for solving elliptic partial differential equations, in the field of computer vision, and in many other areas of mathematics and engineering. The PhD thesis is based on research and results obtained after 2020, which makes it particularly relevant. The obtained estimates of the integration error are very important from a practical point of view.

2. General description of the documents presented

To this procedure, I received the following documents: a dissertation of 189 pages, an abstract of 41 pages, an autobiography, and 2 articles:

- one article published in the journal Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences;

- one article accepted for publication in the Annual of Sofia University "St. Kliment Ohridski".

The candidate's first paper was published in a journal that is referenced in quartile 4 of the Web of Science. I am not aware of any citations of the candidate's publications.

The PhD thesis has three chapters, the first of which contains definitions, properties, and known results, on which the candidate's new theoretical results have been obtained. The second chapter introduces the notion multidimensional modified integral. Based on this concept, the classical LeVeque inequality, the Koksma formula, the Erdős-Turán-Koksma inequality, and the Weyl integral criterion are proved. The third chapter defines anchored and unanchored Sobolev spaces and weighted diaphony in them. The relation between the mean square worst-case error of integration and the corresponding weighted diaphony is determined. The dissertation is based on 65 cited sources.

3. Research Methodology

The research was conducted using the tools of mathematical analysis and functional analysis. Approximation approaches and approximate calculations of integrals in Hilbert spaces, anchored and unanchored Sobolev spaces, were applied.

4. Scientific contributions of the dissertation

The author declares contributions arranged in six groups. He introduces new mathematical structures through the concept of multidimensional modified integrals in the system $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. By the defined modified integrals, the classical inequalities of LeVeque, Koksma, and Erdős-Turán-Koksma are proved. Using arithmetic in the functional system $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$, the Weyl criterion for a uniformly distributed sequence is presented in integral form through the developed modified integrals. In the dissertation, a conclusion is made that in the general case, the error of integration in Sobolev spaces does not depend on the diaphony. This motivates the author to introduce the concepts of anchored Sobolev space and mean square worst-case error of integration. I believe that the main result in this dissertation is formulated in Theorem 3.7, where the relation between the worst-case error of integration in anchored Sobolev spaces and the corresponding anchored weighted diaphony is explicitly presented. Analogous results have been achieved in unanchored Sobolev spaces. The author of the dissertation, Elmi Shabani, presents a high-level scientific work, and his claims for the declared contributions are well-founded.

5. Evaluation of the candidate's personal contribution

The articles presented by Elmi Shabani are co-authored with his scientific supervisor, Assoc. Prof. DSc Vasil Grozdanov. I believe that Elmi Shabani fully participated in obtaining the described results.

6. Critical Notes

I have no critical remarks.

7. Conclusion

The presented dissertation contains new and significant scientific results that can be directly applied in engineering practice. It meets all the criteria and indicators for acquiring the scientific degree "Doctor", according to the Law on the Development of the Academic Staff in the Republic of Bulgaria, the Regulations for the Implementation of the Law on the Development of the Academic Staff in the Republic of Bulgaria and the Internal Rules for the Development of the Academic Staff at South-West University "Neofit Rilski".

I confidently give an excellent assessment of the dissertation: The functional system $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ and some of its applications, written by Elmi Shabani, and strongly recommend that the scientific jury award the educational and scientific degree “Doctor” in the field of higher education 4. natural sciences, mathematics, and informatics, professional area 4.5 Mathematics, scientific subject mathematical analysis to Elmi Shabani.

10.11.2025
Gabrovo

Author of the opinion:
Prof. Dr. Todor Todorov