

Становище

от доц. д-р Михаил Колев Колев, катедра „Математика“, Факултет по транспортно строителство, УАСГ – София,
член на научно жури, назначено от Ректора на ЮЗУ "Неофит Рилски" със заповед No 2193 от 30 септември 2025 г., за провеждането на процедура по защита на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен "доктор"

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика.

Професионално направление: 4.5. Математика.

Докторска програма: Математически анализ.

Тема на дисертационния труд: Функционалната система Γ_B и някои нейни приложения.

Автор на дисертационния труд: Елми Шабани

Научен ръководител: доц. д.н. Васил Грозданов

Докторант Елми Шабани е завършил две бакалавърски програми по математика в "Hasan Prishtina" University (през 2005 и 2014 г.), през 2019 г. е придобил магистърска степен по приложна математика в Албания в "Aleksandër Xhuvani" University, Elbasan. От 2021 г. е докторант в катедра "Математика" на ЮЗУ. Преди обучението си като докторант Елми Шабани има сериозен преподавателски опит в средни и висши учебни заведения.

Представените от Елми Шабани материали за конкурса отговарят на изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България, Правилника за неговото прилагане и Вътрешните правила за развитие на академичния състав на ЮЗУ "Н. Рилски".

Свързаните с дисертационния труд публикации с участие на докторанта са две, публикувани (или приети за публикуване) в реномираните списания „Доклади на БАН“ и „Годишник на СУ – ФМИ“, индексирани във Web of Science / Scopus. Това е показател за значимостта на постигнатите от докторант Елми Шабани научни резултати.

Съответстващите на публикациите 45 точки напълно удовлетворяват минималните национални изисквания за придобиване на образователната и научна степен „Доктор“.

Дисертационният труд е в обем от 189 стандартни машинописни страници и има следната структура: Увод, три глави с теоретични разработки, приноси на автора, списък с публикациите на автора, свързани с дисертацията и цитирана литература.

Глава първа има помощен характер за дисертацията. Тук са представени някои добре известни резултати от теорията на равномерно разпределените редици. Авторът акцентира на дефиницията за равномерно разпределена редица,

интегралния и експоненциалния критерии на Вайл. Заради факта, че в дисертацията се изследват някои количествени мерки за неравномерността на разпределението на редици, в тази глава са дефинирани екстремният, квадратичният звезда-дискрепанс и класическата диафония на мрежи и редици.

Някои класове от пълни ортонормирани функционални системи са използвани за решаване на основните проблеми в дисертационния труд. Дефинирани са и са показани свойствата на три основни ортонормирани функционални системи – Уолш функциите при основа b , функциите на Виленкин и B_s -ичните функции, конструирани в Канторови системи. Функционалната система Gamma_{B_s} , конструирана в произволна канторова система, е използвана като апарат за получаване на основните резултати на автора.

В глава първа се разглежда произволна Канторова система, дефинирани са основните елементи на B_s -ичната аритметика и са показани свойствата на функциите от системата Gamma_{B_s} по отношение на тази аритметика. Вече в глава трета тази аритметика е използвана за дефиниране на понятието средно квадратична грешка на интегрирането в Хилбертови пространства.

В Глава втора на дисертацията, авторът дефинира понятието многомерен модифициран интеграл от B_s -ичните функции. Резултатите, получени тук, представляват много приложения на тези интеграли в количествената и качествената теория на равномерно разпределите редици.

Първият резултат е неравенството на Льовек, което е оценка отгоре на екстремалния дискрепанс на произволна едномерна мрежа в термините на въведените модифицирани интеграли от B_s -ичните функции.

Формулата на Коксма представлява представяне на квадратичния дискрепанс на произволна s -мерна мрежа в термините на въведените модифицирани интеграли. Това е основен резултат за глава втора, тъй като на негова основа след това се доказва неравенството на Ердьош-Туран-Коксма, както и интегралния критерий на Вайл.

По принцип, неравенството на Ердьош-Туран-Коксма е важен резултат от количествената теория на равномерно разпределените редици. Тук, неравенството на Ердьош-Туран-Коксма представлява оценка отгоре на квадратичния дискрепанс на произволна s -мерна мрежа в термините на въведените модифицирани интеграли. Направена е нетривиална оценка отгоре на остатъчния член, който се получава от замяната на безкрайната сума от формулата на Коксма с крайната сума, участваща в неравенството на Ердьош-Туран-Коксма.

От гледна точка на качествената теория на равномерно разпределените редици, в дисертацията е представен интегралният критерий на Вайл, който е едно ново необходимо и достатъчно условие, за това една редица да бъде равномерно разпределена.

В глава трета на дисертацията, B_s -ичните функции, конструирани в Канторови системи, са използвани за решаване на проблеми, на квази-Монте Карло интегрирането в теглови Хилбертови пространства. Развита в глава първа B_s -ична аритметика, е използвана за да се дефинира понятието средно квадратична грешка на интегрирането в Хилбертови пространства.

Използвани са два класически примера на теглови Соболеви пространства – т. н. незакотвени и закотвени Соболеви пространства. Това са добре известни в

литературата функционални пространства, интензивно изследвани от редица автори в последните 20 години. Функциите на Bs-ичната система са използвани от автора за изследването на средно квадратична грешка на интегрирането в тези пространства. Получени са формули в явен вид за средно квадратична грешка на интегрирането в разглежданите теглови Соболеви пространства.

Формулите за средно квадратична грешка на интегрирането в разглежданите пространства, са използвани като мотивация за да се въведат два нови типа на диафонията – т. н. unanchored and anchored weighted diaphony. Доказано е, че тези два нови типа на диафонията са количествени характеристики за неравномерността на разпределението на редици. Доказани са и връзките, които съществуват между средно квадратична грешка на интегрирането в двете Соболеви пространства и тези два нови типа на диафонията.

Основните резултати на дисертацията са включени в публикациите и автореферата, който описва коректно поставените цели, задачи и основните приноси на проведеното от докторанта научно изследване.

Представените от автора резултати, ми дават достатъчни основания да направя следните изводи:

В дисертационния труд авторът е получил сериозни резултати в двете научни области – количествената и качествената теория на равномерно разпределените редици и теорията, и практиката на Квази-Монте Карло интегрирането в Соболеви пространства;

За да се докажат основните резултати на дисертационния труд е било необходимо да се извършат редица сложни изчислителни процеси, представени като лемми и използвани след това за доказване на основните резултати. Това показва, че докторантът е показал много технически умения познания за разработване на разглежданите научни проблеми.

Заклучение

Представеният дисертационен труд на Елми Шабани съответства на изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България, Правилника за неговото прилагане и Вътрешните правила за развитие на академичния състав на ЮЗУ "Неофит Рилски". В процеса на проведеното научно изследване докторант Елми Шабани прояви такива важни качества като систематичност, строг научен подход, способност да анализира резултати на автори в областта на математиката и да ги прилага творчески за получаване на нови резултати.

Стойността на оригиналните научни и научно-приложни резултати, представени в публикациите по темата, автореферата и дисертационния труд, ми позволяват да дам положителна оценка за осъщественото изследване. Предлагам на уважаемото научно жури да присъди образователната и научна степен “доктор” на Елми Шабани.

София, 12 ноември 2025 г.

Член на журито:

/доц. д-р М. Колев/

Opinion

by Assoc. Prof. Dr. Mihail Kolev Kolev, Department of Mathematics, Faculty of Transport Engineering, UACEG – Sofia, member of the scientific jury, appointed by the Rector of the South-West University "Neofit Rilski" with order No. 2193 of September 30, 2025, for the conduct of a procedure for the defense of a dissertation for the award of the educational and scientific degree "doctor"

Higher education area: 4. Natural sciences, mathematics and computer science.

Professional direction: 4.5. Mathematics.

Doctoral program: Mathematical analysis.

Thesis topic: The function system Γ_B and some of its applications.

Author of the dissertation: Elmi Shabani

Scientific advisor: Assoc. Prof. Dr. Sci. Vassil Grozdanov

Doctoral student Elmi Shabani completed two bachelor's programs in mathematics at "Hasan Prishtina" University (in 2005 and 2014), in 2019 he obtained a master's degree in applied mathematics in Albania at "Aleksandër Xhuvani" University, Elbasan. Since 2021 he has been a doctoral student in the Department of Mathematics of South-West University "N. Rilski". Before his studies as a doctoral student, Elmi Shabani has significant teaching experience in secondary and higher education institutions.

The materials submitted by Elmi Shabani for the competition meet the requirements of the Law on the Development of the Academic Staff in the Republic of Bulgaria, the Regulations for its Implementation and the Internal Rules for the Development of the Academic Staff of the South-West University "N. Rilski".

The publications related to the dissertation work with the participation of the doctoral student are two, published (or accepted for publication) in the renowned journals "Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences" and "Annual of the Sofia University - Faculty of Mathematics and Informatics", indexed in Web of Science / Scopus. This is an indicator of the significance of the scientific results achieved by doctoral student Elmi Shabani.

The 45 points corresponding to the publications fully satisfy the minimum national requirements for obtaining the educational and scientific degree "Doctor".

The dissertation is 189 standard typewritten pages long and has the following structure: Introduction, three chapters with theoretical developments, contributions of the author, a list of the author's publications related to the dissertation and cited literature.

Chapter one is of an auxiliary nature for the dissertation. Here some well-known results from the theory of uniformly distributed series are presented. The author emphasizes the definition of a uniformly distributed series, the integral and exponential Weyl criteria. Due to the fact that the dissertation investigates some quantitative measures of the non-uniformity of the series distribution, in this chapter the extreme, quadratic star-discrepancy and classical diaphony of networks and series are defined.

Some classes of complete orthonormal function systems are used to solve the main problems in the dissertation. The properties of three main orthonormal function systems are defined and shown – Walsh functions in basis b , Vilenkin functions and Bs -ic functions constructed in Cantor systems. The functional system Γ_{Bs} , constructed in an arbitrary Cantor system, is used as a device for obtaining the main results of the author.

In the first chapter, an arbitrary Cantor system is considered, the main elements of Bs -ic arithmetic are defined and the properties of functions from the Γ_{Bs} system with respect to this arithmetic are shown. Already in the third chapter, this arithmetic is used to define the concept of the mean square error of integration in Hilbert spaces.

In Chapter Two of the dissertation, the author defines the concept of a multidimensional modified integral of Bs -type functions. The results obtained here represent many applications of these integrals in the quantitative and qualitative theory of uniformly distributed series.

The first result is Löweck's inequality, which is an upper bound on the extreme discrepancy of an arbitrary one-dimensional network in terms of the introduced modified integrals of Bs -type functions.

The Koksma formula is a representation of the quadratic discrepancy of an arbitrary s -type network in terms of the introduced modified integrals. This is a fundamental result for Chapter Two, since the Erdős-Túran-Koksma inequality, as well as the Weyl integral criterion, are then proved on its basis.

In principle, the Erdős-Túran-Koksma inequality is an important result of the quantitative theory of uniformly distributed series. Here, the Erdős-Túran-Koksma inequality is an upper bound on the quadratic discrepancy of an arbitrary s -dimensional network in terms of the introduced modified integrals. A nontrivial upper bound is made on the residual term, which is obtained by replacing the infinite sum of the Koksma formula with the finite sum involved in the Erdős-Túran-Koksma inequality.

From the point of view of the qualitative theory of uniformly distributed series, the dissertation presents the Weyl integral criterion, which is a new necessary and sufficient condition for a series to be uniformly distributed.

In chapter three of the dissertation, Bs -ic functions constructed in Cantor systems are used to solve problems of quasi-Monte Carlo integration in weighted Hilbert spaces. The Bs -ic arithmetic developed in chapter one is used to define the concept of mean square error of integration in Hilbert spaces.

Two classical examples of weighted Sobol spaces are used – the so-called unanchored and anchored Sobol spaces. These are well-known functional spaces in the literature, intensively studied by a number of authors in the last 20 years. The functions of the Bs -ic system are used by the author to study the mean square error of integration in these spaces. Explicit formulas for the mean square error of integration in the considered weighted Sobol spaces are obtained.

The formulas for the mean square error of integration in the considered spaces are used as a motivation to introduce two new types of diaphony – the so-called unanchored and anchored weighted diaphony. It is proven that these two new types of diaphony are quantitative characteristics of the unevenness of the distribution of ranks. The connections that exist between the mean square error of integration in the two Sobol spaces and these two new types of diaphony are also proven.

The main results of the dissertation are included in the publications and the abstract, which correctly describes the added goals, objectives and foundations brought to the scientific research conducted by the doctor.

The results presented by the author give me the following sufficient grounds for drawing conclusions:

In the dissertation thesis, the author has obtained serious results in two scientific areas – the quantitative and qualitative theory of uniformly distributed series and the theory and practice of Quasi-Monte Carlo integration in Sobolev spaces;

In order to prove the main results of the dissertation thesis, it was necessary to perform a number of complex computational processes, presented as lemmas and then used to prove the main results. This shows that the doctoral student has shown a lot of technical skills and knowledge for developing the scientific problems under consideration.

Conclusion

The presented dissertation work of Elmi Shabani complies with the requirements of the Law on the Development of the Academic Staff in the Republic of Bulgaria, the Regulations for its implementation and the Internal Rules for the Development of the Academic Staff of the South-West University "Neofit Rilski". In the process of the conducted scientific research, doctoral student Elmi Shabani demonstrated such important qualities as systematicity, a rigorous scientific approach, the ability to analyze the results of authors in the field of mathematics and to apply them creatively to obtain new results.

The value of the original scientific and scientifically applied results presented in the publications on the topic, the abstract and the dissertation thesis allow me to give a positive assessment of the research carried out. I propose to the esteemed scientific jury to award the educational and scientific degree "doctor" to Elmi Shabani.

Sofia, 12 November 2025

Member of the scientific jury:

/Assoc. Prof. Dr. M. Kolev/