

Югозападен университет „Неофит Рилски“, Благоевград

С Т А Н О В И Щ Е

от доц. д-р Илинка Андонова Димитрова
катедра „Математика и физика“, Природо-математически факултет
Югозападен университет „Неофит Рилски“, Благоевград,
член на научно жури определено със заповед № 2193 от 30.09.2025 г. на Ректора
на Югозападен университет „Неофит Рилски“

за дисертацията „The function system $\Gamma_{\mathcal{B}}$ and some of its applications“ на Елми Шабани,
докторант в самостоятелна форма на обучение в катедра „Математика и физика“
към Природо-математическия факултет на Югозападен университет „Неофит Рилски“,
за придобиване на образователна и научна степен „доктор“
в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5. Математика,
научна специалност Математически анализ

1. Биографични данни.

Елми Шабани е роден през 1965 г. в гр. Клина, Косово. Завършил е специалност „Математика“, ОКС „Професионален бакалавър“ (3 години) в Университета в Прищина, Косово през 2005 г., а през 2014 г. е продължил обучението си в специалност „Математика“ на същия университет за получаване на ОКС „Бакалавър“ (4 години). През 2019 г. е завършил магистърската програма „Приложна математика“ в Университета на Елбасан, Албания.

От 2021 г. Елми Шабани е докторант в самостоятелна форма на обучение по докторска програма „Математически анализ“ към катедра „Математика и физика“ на Природо-математическия факултет на Югозападен университет „Неофит Рилски“, Благоевград.

От 1986 г. работи като учител по математика съответно в Дренас (1986 – 1987), Скендерай (1987 – 1998) и Клина (2000 – понастоящем). Освен това от 2016 г. е асистент по математика в Университета в Печ.

2. Съответствие с минималните национални изисквания.

Докторант Елми Шабани има две статии по темата на дисертацията, които са в съавторство с научния ръководител – доц. дн Васил Грозданов. Приемам, че приносът на Елми Шабани в тези статии е равностоен. Едната статия е публикувана в Доклади на БАН (SJR 2024 – Q3), а другата е приета за публикуване в Annual of Sofia University St. Kliment Ohridski, Faculty of Mathematics and Informatics, и ще бъде отпечатана в том 112 (2025) на Годишник на СУ – ФМИ (SJR 2024 – Q4). Двете списания са индексирани в Scopus, което ми дава основание да заключа, че докторантът напълно удовлетворява минималните национални изисквания по чл. 26, ал. 2 и 3 на ЗРАСРБ.

3. Основни научни и научно-приложни приноси на дисертацията.

Представеният дисертационен труд е в областта на равномерно разпределените редици и приложението на функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ към теорията на равномерно разпределените редици и квази-Монте Карло интегрирането. Дисертацията на Елми Шабани се състои от увод, три глави, заключение, приноси, списък с публикации на докторанта и литература с 67 източника.

В увода е описано накратко съдържанието на всяка една от главите.

Първата глава има спомагателен характер. Тук са представени дефинициите и свойствата на някои класове функционални системи като b -ична функционална система, многомерна Канторова система $\mathcal{B}_s$, пълни ортонормирани функционални системи, тригонометрична функционална система, функционална система на Уолш функциите от ред b , функционална система на Виленкин конструирана в $\mathcal{B}_s$ -ична Канторова система, функционална система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. Всички разглеждани функционални системи са конструирани с помощта на Канторова числова система. Освен това, тук са представени някои елементи от теорията на равномерно разпределените редици както и някои количествени характеристики за неравномерността на разпределението на редици като различни типове на дискрепанса и диафонията.

Във втората глава са показани някои приложения на функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ към теорията на равномерно разпределените редици. Въведено е понятието за многомерни модифицирани интегрални на функциите на системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. Някои класически резултати от теорията на равномерно разпределените редици като неравенството на Левек (Теорема 2.1), формулата на Коксма (Теорема 2.2), неравенството на Ердьош-Туран-Коксма (Теорема 2.3) и интегралния критерий на Вайл (Теорема 2.4) са представени в рамките на въведените модифицирани интегрални. Резултатите от тази глава са приети за публикуване в Годишника на Софийския университет – Факултет по математика и информатика.

Третата глава разглежда някои приложения на функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ в теорията на квази-Монте Карло интегрирането в Соболеви пространства с пораждащо ядро. Въведено е понятието за средноквадратична грешка на интегрирането, което се основава на аритметика, свързана с функциите на системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. Представени са някои детайли, свързани с това понятие. Разгледани са два типа теглови Соболеви пространства с пораждащо ядро – незакотвени и закотвени. Доказани са точните формули за средноквадратичната грешка на интегрирането в тези пространства (Теорема 3.2 и 3.5, съответно). Въведени са понятията незакотвена теглова диафония (Дефиниция 3.5 и Теорема 3.3) и закотвена теглова диафония (Дефиниция 3.6 и Теорема 3.6). Средноквадратичните грешки на интегрирането в разглежданите пространства са представени чрез съответните версии на диафонията (Теорема 3.4 и 3.7, съответно). Една част от резултатите в тази глава са публикувани в списанието Доклади на БАН.

Авторефератът правилно отразява основните резултати и научните приноси на дисертацията.

Не съм установила плагиатство или недостоверност на представените научни данни в дисертационния труд.

4. Критични бележки и препоръки

Съдържанието не съдържа пълните наименования на главите и параграфите. Така например първа глава от дисертацията се казва „Some preliminary notations and statements“, а в съдържанието е написано само „Some preliminary notations“. В наименованието на втора глава липсва текста „uniform distribution of sequences“ и т.н.

Някои от параграфите в първа глава като например 1.3.2, 1.3.3 и 1.4.2 са прекалено кратки. Считам, че е неуместно да се прави отделен параграф, който съдържа само една теорема без доказателство.

В параграф 3.4 на страници 115 и 116 се говори за монография вместо за дисертация.

В представените от докторанта документи не е споменато да е участвал в конференции. Считам, че апробирането на получените резултати е изключително важно и препоръчвам докторант Елми Шабани да представи резултатите от дисертацията си на подходящи за тематиката конференции.

В заключение ще отбележа, че абстрахирайки се от някои несъществени технически грешки, дисертацията е оформена добре и е написана на ясен и точен математически език.

5. Заключение

Всичко казано по-горе показва, че представеният дисертационен труд отговаря на критериите и показателите за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ съгласно Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и Вътрешните правила за развитие на академичния състав в ЮЗУ „Неофит Рилски“. Това ми дава основание да дам своето положително становище и да гласувам „ЗА“ присъждането на образователната и научна степен „доктор“ на Елми Шабани.

Дата: 07.11.2025 г.

Член на журито:

/доц. д-р Илинка Димитрова/

South-West University "Neofit Rilski", Blagoevgrad

OPINION

by Assoc. Prof. Dr. Ilinka Andonova Dimitrova
Department of Mathematics and Physics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences
South-West University "Neofit Rilski", Blagoevgrad,
member of the scientific jury appointed by Order No. 2193 of 30.09.2025 of the Rector
of South-West University "Neofit Rilski"

for the dissertation "The function system $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ and some of its applications" by Elmi Shabani,
doctoral student in independent form of study in the Department of Mathematics and Physics
at the Faculty of Mathematics and Natural Sciences of South-West University "Neofit Rilski",
for the award of the educational and scientific degree of "Doctor"
in the field of higher education 4. Natural Sciences, Mathematics and Informatics,
professional field 4.5. Mathematics,
doctoral program Mathematical Analysis

1. Biographical data.

Elmi Shabani was born in 1965 in the town of Klina, Kosovo. He graduated with a degree Professional Bachelor (3 years) in Mathematics at the University of Pristina, Kosovo in 2005, and in 2014 he continued his education in Mathematics at the same university to obtain a Bachelor's Degree (4 years). In 2019, he completed a master's program in Applied Mathematics at the University of Elbasan, Albania.

Since 2021, Elmi Shabani has been a doctoral student in the independent form of study in the doctoral program Mathematical Analysis at the Department of Mathematics and Physics of the Faculty of Mathematics and Natural Sciences at South-West University "Neofit Rilski", Blagoevgrad.

Since 1986, he has worked as a mathematics teacher in Drenas (1986–1987), Skenderaj (1987–1998), and Klina (2000–present). In addition, since 2016, he has been an assistant professor of mathematics at the University of Pécs.

2. Compliance with minimum national requirements.

Doctoral student Elmi Shabani has two articles on the topic of his dissertation, co-authored with his academic supervisor, Assoc. Prof. Vasil Grozdanov, DSc. I accept that Elmi Shabani's contribution to these articles is equal. One article has been published in *Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences* (SJR 2024 – Q3), and the other has been accepted for publication in the *Annual of Sofia University "St. Kliment Ohridski"*, Faculty of Mathematics and Informatics, and will be printed in volume 112 (2025) (SJR 2024 – Q4). Both journals are indexed in Scopus, which leads me to conclude that the doctoral student fully meets the minimum national requirements.

3. Main scientific and applied scientific contributions of the dissertation.

The presented dissertation is in the field of uniformly distributed sequences and the application of the functional system $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ to the theory of uniformly distributed sequences and quasi-Monte Carlo integration. Elmi Shabani's dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, contributions, a list of the doctoral student's publications, and a bibliography with 67 sources.

The introduction briefly describes the content of each chapter.

The first chapter is of an auxiliary nature. It presents the definitions and properties of some classes of function systems such as b-adic function systems, multidimensional Cantor systems $\mathcal{B}_s$, complete orthonormal function systems, trigonometric function system, Walsh function system of order b, Vilenkin functions constructed in $\mathcal{B}_s$ dimensional Cantor system, function system $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. All functional systems considered are constructed using the Cantor number system. In addition, some elements of the theory of uniformly distributed sequences are presented here, as well as some quantitative measures for the irregularity of the distribution of sequences, such as different types of discrepancy and diaphony.

The second chapter shows some applications of the function system $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ to the theory of uniformly distributed sequences. The concept of multidimensional modified integrals of the functions of the system $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ is introduced. Some classical results from the theory of uniformly distributed sequences, such as the LeVeque's inequality (Theorem 2.1), the Koksma's formula (Theorem 2.2), the Erdős–Turan–Koksma's inequality (Theorem 2.3), and Weyl's integral criterion (Theorem 2.4) are presented within the terms of the introduced modified integrals. The results of this chapter have been accepted for publication in the Annual of Sofia University "St. Kliment Ohridski", Faculty of Mathematics and Informatics.

The third chapter examines some applications of the functional system $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ in the theory of quasi-Monte Carlo integration in reproducing kernel Sobolev space. The concept of mean square worst-case error of integration is introduced, which is based on arithmetic related to the functions of the system $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. Some details related to this concept are presented. Two types of reproducing kernel weighted Sobolev spaces are considered – unanchored and anchored. The exact formulas for the mean square worst-case error of integration in these spaces are proved (Theorems 3.2 and 3.5, respectively). The concepts of unanchored weighted diaphony (Definition 3.5 and Theorem 3.3) and anchored weighted diaphony (Definition 3.6 and Theorem 3.6) are introduced. The mean square worst-case errors of integration in the considered spaces are presented by the corresponding versions of the diaphony (Theorems 3.4 and 3.7, respectively). Some of the results in this chapter have been published in the journal Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences.

The abstract accurately reflects the main results and scientific contributions of the dissertation.

I have not found any plagiarism or inaccuracy in the scientific data presented in the dissertation.

4. Critical comments and recommendations

The table of contents does not contain the full titles of the chapters and paragraphs. For example, the first chapter of the dissertation is titled "Some preliminary notations and statements," but the table of contents only lists "Some preliminary notations". In the title of the second chapter is missing the text "uniform distribution of sequences", etc.

Some of the paragraphs in Chapter 1, such as 1.3.2, 1.3.3, and 1.4.2, are too brief. I consider it inappropriate to create a separate paragraph containing only one theorem without proof.

Paragraph 3.4 on pages 115 and 116 refers to a monograph instead of a dissertation.

The documents submitted by the doctoral student do not mention his participation in conferences. I consider the approval of the obtained results to be extremely important and recommend that doctoral student Elmi Shabani present the results of his dissertation at conferences relevant to the topic.

In conclusion, I would like to note that, apart from a few minor technical errors, the dissertation is well structured and written in clear and precise mathematical language.

5. Conclusion

Everything said above shows that the presented dissertation meets the criteria and indicators for obtaining the educational and scientific degree "doctor" in accordance with the Law on the Development of Academic Staff in the Republic of Bulgaria (LDASRB), the Regulations for the implementation of the LDASRB, and the Internal Rules for the Development of Academic Staff at SWU "Neofit Rilski". This gives me reason to give my positive opinion and vote "YES" for the awarding of the educational and scientific degree "doctor" to Elmi Shabani.

Date: 07.11.2025

Member of the scientific jury:

/Assoc. Prof. Dr. Ilinka Dimitrova/