ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ

КАТЕДРА „МАТЕМАТИКА”

Маряна Георгиева Кацарска

УЧЕБНО СЪДЪРЖАНИЕ И МОДЕЛ ЗА ОБУЧЕНИЕ В ИЗВЪНКЛАСНАТА РАБОТА ПО МАТЕМАТИКА

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователна и научна степен "доктор"

Област на висшето образование: 1. Педагогически науки

Професионално направление: 1.3. Педагогика на обучението по ...

Научна специалност: Методика на обучението по математика

НАУЧНИ РЪКОВОДИТЕЛИ:

доц. д-р Михаил Гаврилов **акад.д.н. Стефан Додунеков**

проф. д.н. Иван Мирчев

Рецензенти:

1. **Проф. д-р Марга Георгиева**
2. **Проф. д-р Иван Тонов**

ОБЩА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Актуалност на проблема

На олимпиади и различни математически състезания често се дават задачи от области в математиката, които не се изучават в задължителната учебна програма в училище – принцип на Дирихле, теория на графите, диофантови уравнения, числови сравнения и др..

За успешното справяне на учениците с такива задачи е необходимо тези теми да бъдат включени в различните форми на извънкласната работа.

Появиха се много източници на информация и разнообразни пособия за допълнителни занимания на учениците, интернет-сайтове с хаотично събрани задачи, съдържащи понякога некоректни решения. Такива източници създават у учениците и начинаещите учители неправилна представа за математиката като цяло. Това нанася по-голяма вреда, отколкото ползата от решаването на една или няколко интересни задачи.

Обект, предмет, цел и задачи на дисертационния труд

Обект на изследване е извънкласната работа по математика с ученици от IV – VII клас.

Предмет на изследването е възможността за въвеждане на елементи от теория на числата, теория на графите и принцип на Дирихле в учебното съдържание на извънкласната работа по математика при учениците от IV – VII клас за решаването на някои класове задачи.

Цел на настоящата дисертационна работа е да ***се предложи модел на учебно съдържание и подходящи методически решения за извънкласна работа по математика при обучаването на учениците в решаване на задачи от теория на графите, теория на числата, принцип на Дирихле и симетрични полиноми.***

Хипотезата* на дисертационния труд е, че ако в *извънкласната работа по математика се изучава теория на числата, теория на графите и принцип на Дирихле, ще се даде възможност за формиране на положителна нагласа у учениците към предмета математика и по-доброто им представяне на тестовете от НВО.

За изпълнението на поставената цел са формулирани следните ***задачи***:

1. Да се направи проучване на психолого-педагогическата и методическата литература по проблема с обучаване на учениците в решаване на задачи.
2. Да се определят възможностите от използването на ТГ, ТЧ и принципа на Дирихле за обогатяване и задълбочаване съдържанието на ИКРМ.
3. Да се покажат някои възможностите за приложния характер на разглежданите теми.
4. Да се проучи съдържанието по темите в учебната литература и разработи вариант на методика за обучаване на учениците в решаване на задачи чрез прилагане на съответната теория.
5. Да се проследи динамиката на мотивацията за изучаване на предмета математика в резултат на участието на ученици в ИКФР и представянето им на НВО
6. Да се повери експериментално възможността от включването на някои елементи от ТЧ и ТГ в извънкласната работа по математика.

За решаване на поставените задачи са използвани следните **методи**:

- изследване на психо-педагогическа и методическа литература по проблемите за обучение на учениците в решаване на задачи; разкриване възможности на ТЧ, ТГ и принцип на Дирихле като средство за обучаване на учениците в умения за решаване на задачи; отражение СИП по математика като форма на извънкласната работа за повишаване на интереса към предмета математика;
- *Дидактически експеримент*;

Наблюдение върху участието на учениците от IV – VI клас (от II ОУ, III – СОУ и VI СОУ – Благоевград в периода 2005 – 2015 г.) при усвояване на новите знания по конкретни теми и прилагането на знанията на урока-игра.

Анкета на ученици от съответните училища, на родители на ученици и на учители;

Анализ и *обобщение* на получените експериментални данни.

Практическа значимост на изследването:

1. Разработено е учебно съдържание и е предложена методика за обучение на учениците в решаване на задачи с помощта на принципа на Дирихле, теория на числата и теория на графите. Същата може да се прилага от учителите по математика в основните и средните училища в различните извънкласни форми на работа.

2. Предложен е общ метод за намиране на признак за делимост на произволно просто число *p,* който е еднотипен за всички прости числа. От ученика се изисква само да намери съответната константа и да формулира признака. По този начин отпада необходимостта да се помнят различни признаци за делимост, например на 7, 11, 13 и т.н. Този начин позволява за 1 – 2 минути да се формулира съответния признак.

3. Моделирани са задачи чрез графи за търсене на многоцифрени числа с определени свойства (например, намирането на 1999-цифрено число, на което всеки две съседни цифри се делят на 19 или 23) или намиране на неизвестно число по резултата, получен след прилагане няколко последователни аритметични операции. Този модел подпомага намирането на решението и го онагледява. Това облекчава обосновката на решението, което е един от проблемите при малките ученици.

4. Предложените мрежови модели (използвана е ТГ) за решаване на задачи от движение, (работа, пълнене на басейни и т.н.) позволяват на учениците по-лесно да видят връзките между величините описващи движението и числовите им характеристики. Това дава възможност и на посредствени ученици да се справят с несложни задачи.

Апробация

Резултатите от дисертационния труд са обсъждани и докладвани на следните научни прояви:

- **Конференции на Съюза на математиците в България:**
  - април 2001, тема на доклада: „Изучаване на симетричните полиноми в задължително избираемата подготовка (ЗИП) по математика в 9-ти клас“;
  - април 2006, тема на доклада: „Елементи от теория на графите в извънкласната работа по математика в пети и шести клас“;
  - април 2009, тема на доклада: „Играта в обучението по математика“**.**
- **Международни конференции ПМФ-2015, 2011 и 2005, Благоевград**,
  - **FMNS - 2005**, юни, Благоевград с доклад: „Решаване на занимателни задачи чрез графи в извънкласната работа по математика в 4 – 6$^{-ти}$ клас“;
  - **FMNS – 2011,** юни, Благоевград с доклад: „**Non-standard mathematical problems in classes“**
  - **FMNS – 2015,** юни, Благоевград с доклад:„Общ алгоритъм за намиране на признак за делимост на произволно просто число“;
- **Доклад на международна научно-практическа конференция**: „Психолого-педагогические основы подготовки учителя в условиях реформирования общеобразовательной и высшей школы“, Мозырь, 28 – 29 ноември 2002, Украйна
- **Научна конференция с международно участие – Стара Загора;**
  - юни 2004, доклад "Изучаване на принципа на Дирихле в извънкласната работа по математика в IV – V$^{-ти}$ клас";
  - юни 2006, доклад в съавторство с проф. Мирчев, Модел на учебно съдържание за извънкласна работа по математика. Методически, организационни и управленчески аспекти.

Публикации по темата на дисертационния труд

Работи по темата на дисертацията са публикувани в реферирани сборници от международни научни конференции – 1 в чужбина и 5 у нас. Научните публикации по темата на дисертационния труд са 9, две от тях са публикувани в списание “Начално училище“, списание с предварително рецензиране, седем са изнесени на международни научни конференции с предварително рецензиране, като всички са публикувани в сборниците с доклади от съответните конференции. Една публикация е на руски език и една на английски. Шест от публикациите са самостоятелни, а останалите три са в съавторство.

Обем и структура на дисертационния труд

Дисертацията съдържа увод, три глави, заключение, списък на научно-приложните приноси, литература и 13 приложения. Списъкът с литература съдържа над 150 източника на кирилица, 7 на латиница и 23 интернет източника. Обемът на дисертацията е 350 страници с приложенията, включващи над 160 фигури, над 10 схеми и 70 таблици, чиито номера в автореферата съвпадат с тези в дисертацията.

СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Структура на дисертацията

В **увода** е обоснована актуалността на работата, разгледана е концепцията за прилагане на стандарти в обучението по математика. Формулирани са целите, задачите, хипотезата, обекта, методологията на изследването, както и практическата значимост на изследването.

В **първа глава** са разгледани психолого-педагогическите и методическите особености на съдържанието, целите и задачите на обучението по математика. Формулирана е необходимостта от изучаване на математиката в съвременните условия, целите и задачите на обучението. Направена е съпоставка на мненията от различни учени относно хуманизация и хуманитаризация на обучението по математика (ОМ). Обоснован е диференцирания подход, разгледано е развиващото обучение като педагогическа основа за извънкласните и факултативни форми. Приведени са примери, илюстриращи прилагането на диференцирания подход.

Във **втора глава** е направена обща характеристика, формулирани са целите и задачите на различните извънкласни форми в обучението по математика. Функциите им са онагледени със схеми. Голяма част е отделена и на ролята на дидактичните игри като средство за мотивация в обучението по математика.

Третата глава е свързана с понятието модел, различни класификации на моделите и моделът на обучение като систематизиран комплекс от закономерности за учителя и учениците. Разгледани са различни трактовки на понятието задача, класификации на задачите, етапи при решаването на задача. Особено място е отделено на анализът на задачата и това е илюстрирано с конкретни примери.

Разгледани са понятия от теория на графите, принцип на Дирихле, делимост, диофантови уравнения, симетрични полиноми и някои техни свойства необходими за решаването определени класове задачи в извънкласната работа по тези теми. Направени са конкретни и методически предложения по темите .

Заключението обобщава постигнатите резултати, отчита изпълнението на задачите и реализирането на целта, доказването на хипотезата, извежда основните приноси в теоретико-приложен и приложен аспект, очертани са някои перспективи. Представен е списък с публикациите по дисертационния труд, формулирани са препоръки за учебно-възпитателната работа.

Приложенията включват конкретни примери илюстриращи теорията в съответните глави. Номерацията на приложенията съответства на номерацията на главата за която се отнася.

В края на дисертацията са приложени декларация за оригиналност, списък на публикациите по дисертацията и библиография.

ПЪРВА ГЛАВА. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИ И МЕТОДИЧЕСКИ ОСОБЕНОСТИ НА СЪДЪРЖАНИЕТО, ЦЕЛИТЕ И ЗАДАЧИТЕ НА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

1.1. Необходимост от изучаване на математика в съвременните условия

Математиката винаги *е* била *неотменна и съществена част от човешката **култура,*** от прогреса на човечеството. Приложения на математиката може да се видят навсякъде: в колата, с която пътувате, в компютъра или преносимото устройство, с което сега слушате музика, играете, четете, изпращате съобщения или правите някаква справка, изобщо прекарвате приятно и ползотворно времето си докато пътувате в автобуса, метрото или чакате изпълнението на някаква поръчка. Накратко, без използването на математиката съвременното общество би било немислимо. Учениците трябва да се убедят, че тя разкрива закономерностите и единството на света. Ето защо в съдържанието на учебния материал трябва да се включват по възможност повече практически задачи от заобикалящата действителност и се показва приложния характер на математиката, значимостта и ролята ѝ за развитието на обществото. За целта е необходимо учениците да придобият умения за работа с математически модели, способности за анализиране на експериментални данни и правят прогнози, като овладеят математическия апарат, необходим за това.

Първата школа, разработвала концепция за математическо образование, е създадена през 795 г. (преди повече от 12 века) по заповед на Карл Велики в градчето Аахен. За организирането ѝ е поканен монахът Алкуин от Британия, който написва една от първите за Средновековна Европа книги по математика „Задачи за изостряне на ума”. В нея под № 18 е известната задача за лодкаря, който трябва да пренесе вълк, коза и зелка през реката. Тази задача и до днес се среща в различни книги ,съдържащи забавни задачи по математика.

„Изострянето на ума” е цел на математическото образование на всяко равнище. За необходимостта от внасянето на занимателни елементи в обучението по математика говори още Блез Паскал (19.VI.1623 – 19.VIII.1662). ***„Предметът математика е толкова сериозен, че не трябва да се пропуска нито една възможност той да се направи поне малко занимателен.”***[1] Особено богати възможности в тази насока дава извънкласната работа по математика. Нейна задача е не само да създаде и поддържа интерес към предмета, но и да стимулира желанието на учениците да се занимават с нея допълнително както под ръководството на учителя, така и самостоятелно.

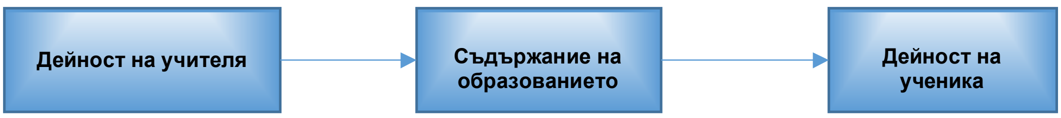
1.2. Цели и задачи на съдържанието и обучението по математика

Изискванията към учебното съдържание по математика за базова и профилирана подготовка се дават от ЕДС, които определят знанията уменията и компетентностите на обучаваните по класове и предмети. Те са задължителни за всички учебни дисциплини от I до XII клас.

Изисквания към резултатите от обучението по математика са формулирани в примерни програми. Математическото образование е насочено към реализирането на три групи основни ***цели –*** общообразователни, възпитателни и практически. Целите на урока се конкретизират в съответствие с конкретното съдържание на учебния материал. Трансформацията на целите в действия позволява диагностициране процеса на усвояване на знанията и уменията на учениците, управляване на тяхното развитие и възпитание.

За всяка от темите към III глава са дадени образователните и възпитателните цели, а за реализирането на практическите добра възможност са задачите, които имат практическа насоченост (Например, изготвянето на дневен разпис на часовете за даден клас, съобразен с възможностите на учителите – от тема „Графи“, намиране на най-кратък път за пощальона и т.н.). Изброените по-горе групи цели служат за основа при подбора на учебно съдържание, в което освен знания по математика, се включват и действия, адекватни на математическите понятия, теореми, общо научни методи на познание, а също така и специални евристични подходи.

Основните връзки между съдържанието на образованието, дейностите на учителя и дейностите на ученика в процеса на обучението са представени на Фиг.1.1.



Фиг. 1.1 Основни взаимовръзки в процеса на обучението

Хуманизацията на обучението изисква учебното съдържание (в частност по математика) да не води единствено до формализиране на знанията. Учителят трябва да отчита индивидуалните особености на учещите се, за да се запази интереса им към ученето. Към показателите на хуманизацията на образованието можем да отнесем мотивацията и диференциацията, на които не се отделя достатъчно внимание. В резултат на хуманизацията се появиха различни училища, класове със задълбочено изучаване на предмета (от 60-те години на миналия век), часовете по СИП и ЗИП на по-съвременен етап.

1.3. Хуманизация и хуманитаризация на обучението по математика

Съществуват спорове около съдържанието на хуманизацията и хуманитаризацията на образованието. Някои автори ги виждат в широката свобода за избор на съдържание на учебния материал, други – в реализацията на идеята за създаване условия за развитие на различни способности на учещите се, трети – в дълбоките познания на ученика.

Всичко се свежда към създаване на такава среда в училище, която благоприятства развитието на способностите на подрастващите, спомага за реализацията на личния им потенциал и ги подбужда към търсене на собствени резултати в обучението.

Хуманизацията предполага преструктуриране на предметното съдържание и неговото изложение, осигуряване на максимална достъпност на учебния материал за учениците, а хуманитаризацията посочва границата, под която всяко опростяване носи вреда.

Осигуряването на максимална достъпност на учебния материал за учениците предполага прилагането на диференцирания подход при организацията на учебния процес.

1.4. Диференцираният подход при обучението по математика

[1] Паскаль Блез. Мысли. http://royallib.com/book/paskal_blez/misli.html, достъпен към 12.2015

Диференцираният подход в обучението има хуманен характер, защото позволява развитие на всеки ученик според собствените му възможности и личностни качества.

Културологическият подход към образованието означава подбор на такова съдържание, което осигурява развитието на личността във всичките ѝ съвкупности от индивидуано-психологически особености, духовни потребности и социално-нравствени качества. Като средство за хуманизация на образованието този подход има за своя цел създаване на условия, при които човек може да избере тези сфери и аспекти на дейност, в рамките на които може да се осъществи неговото духовно самоопределение.

Диференцираният подход към учениците в процеса на обучение се състои в съобразяване на учебната дейност с техните възможности индивидуални особености. В дидактиката се различават следните видове диференциация: диференциране на обучението по способности; диференциране на обучението по липса на способности; диференциране по проектирана професия; диференциация според интересите на учениците; обучение на талантливи деца. Други автори разграничават външна и вътрешна диференциация.

Ще разгледаме по-подробно диференциацията по равнища. Броят им според различните автори варира от 3 до 5. За оценка достигнатото от учениците равнище на умение за решаване на математически задачи може да се използва методиката разработена от В. П. Беспалко [2].

Съобразно психолого-педагогическото определение под задача се разбира целта, чието достигане е възможно с помощта на определени действия в точно определена ситуация. В зависимост от предпочетения от ученика вариант, за да реши дадена задача ще му се наложи да извършва дейности от творчески или репродуктивен характер. В зависимост от това се разграничават различни нива на усвояване. (виж Таблица 1.1)

Равнища на усвояване	**Компоненти на задачата**			**Дейност на ученика**
	Цел	Начин на задаване	Начин за решаване /действие/	
0 Запознаване, разбиране	дадена	Явно зададена /типова/	Зададен във вид на правило /алгоритъм/	По аналогия с решена вече задача
I Алгоритмично	дадена	Явно зададена /типова/	Конкретно не е зададен, възстановява се по памет, като по-рано известен във вид на алгоритъм	Репродуктивно-алгоритмична
II Евристично	дадена	Зададена неявно, изисква уточняване /не е типова, но е позната/	Не е зададен, изисква видо- изменяне на известен или получаване на нов начин чрез комбинации от вече познати	Продуктивно-евристична
III Творческо	дадена в общ вид	Не е зададена, изисква намиране на подходяща ситуация /проблемна/	Не е зададен, създава се нов, по-рано неизвестен	Продуктивно-творческа, изследователска

Таблица 1. Равнища на усвояване на учебния материал (по В. Беспалко).

Предложените критерии за класифициране на задачите са относителни. Те зависят от съдържанието на учебния материал, начините за решение на задачата, от миналия опит на ученика, от преценката на учителя.

Контролът за установяване равнището, на което е усвоен учебният материал, включва проверка не само за постиженията на всеки ученик от задължителната математическа подготовка, но и на необходимия минимум от знания и умения, които му позволяват получаване поне на задоволителна оценка. Към нея може да бъде включена и проверка за по-високи нива на постижения, което има своя положителна страна. От една страна тя дава възможност за получаване на обективна информация за състоянието на знанията и уменията на учениците и на тази основа по-нататък мотивирано да се управлява учебния процес и от друга позволява на учениците с различно ниво на подготовка да покажат своите възможности.

Тази проверката може да се направи чрез контролен тест. В зависимост от състава на класа учителят може да увеличи броя на задачите от задължителното или от допълнителното ниво.

1.5 Развиващото обучение – педагогическа основа за построяване на извънкласните занятия по математика

Извънкласните форми на работа дават добри възможности за реализиране целите на ***развиващото обучение***, което за разлика от традиционното се характеризира със стремежа *развитието на мисленето на учениците да се направи управляем процес, а основните методи на мисленето – специален предмет за усвояване*.

[2] Беспалько В. П., Слагаемые педагогические технологии, Москва, Педагогика, 1989

В педагогическата наука се утвърди разбирането за взаимната обусловеност на процесите на обучение, развитие и възпитание. За основна цел на обучението Песталоци счита „събуждане ума на учащите се за активна дейност, изработване на умения да мислят логически, кратко да обясняват същността на изучаваното, както и развитие на всички други познавателни способности". Идеята за развиващото обучение се среща в трудовете на К. Ушински и по-късно е доразвита от Ю. Бабански, Б. Есипов и др.[3] Развиващото обучение е неразривно свързано с формиране на продуктивно (творческо) мислене. Основни показатели за такова мислене са: оригиналност на мисленето – възможност за даване на отговор, коренно различен от стандартния; бързина и гъвкавост на възникване на необикновените асоциативни връзки; възприемчивост към проблема, негово необичайно решение; бързина на мисленето като количество асоциации, идеи, възникващи за единица време в съответствие с някои изисквания; способност да се намерят нови необикновени функции на обекта или негови части.

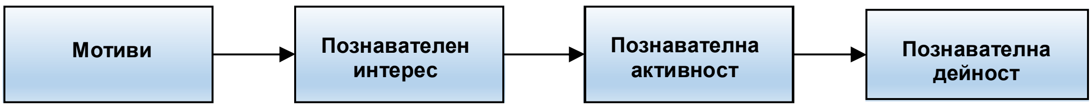
Следователно развиващото обучение целенасочено осигурява развитието и активно се използва за усвояване на знания, умения и навици. То дава приоритет на развиващите функции на обучението по отношение на информационните.

Развиващото обучение на уроците по математика е тясно свързано с развитието на математическото мислене и творческите способности на учещите се.

1.6 Формиране и развитие на интерес към математиката. Развитие на познавателната активност

Формирането на познавателен интерес у учениците се в процеса на обучение може да се осъществи по две основни направления – от една страна чрез предложеното за изучаване учебно съдържание и от друга – чрез организацията на познавателната дейност.

Познавателната активност на учениците при обучението по математика, която е породена от определени мотиви, протича в следната логическа последователност (виж Фиг. 1.3.):



Фиг. 1.3. Познавателна активност, генерирана от мотиви

Мотивите, обуславящи познавателните интереси на учениците, тяхната избирателност и самостоятелност в ученето осигуряват активността им и характеризират интензивността на познавателната дейност.

Широкото навлизане на информационните технологии във всички сфери на обществения живот промени мотивите на учениците за изучаване на математиката. Запомнянето и възпроизвеждането на голям обем от информация вече не е от съществено значение. На преден план излиза необходимостта от умения за ориентиране в тази информация, от анализиране на събраните данни и формулиране на съответните изводи.

Самостоятелната работа на учащите е един от достъпните и проверени от практиката пътища за повишаване на ефективността от урока и активизация на учещите се. При организация на самостоятелната работа трябва да се отдели особено внимание на създаването на стройна система от учебни задачи, обединени от единната концепция и логиката на учебния курс. Когато е възможно, е добре те да се отличават с интересно съдържание, просто и ефектно решение, широк спектър на приложение, минимално изискване на знание от други области и възможност за илюстриране на решението с аналогия от жизнената практика. При съставянето на система от задачи за самостоятелна работа на обучаваните, педагогът преследва целта да се развиват способностите им да намират решения, както и да прилагат придобитите знания и умения при нови условия. Съдържанието на задачата активизира мисловната дейност на ученика и го мотивира за самостоятелна познавателна дейност.

Изисквания за построяване на системи от задачи:

- Съблюдаване на вътрешната логика на курса и принципа за последователно нарастване на сложността;
- Широко приложение на проблемния подход;
- Контрол върху разбирането на условията на задачите от учащите се, а след това на и на предложените решения;
- Взаимовръзка между учебните задачи, както вътре в един раздел, така и между отделните раздели на курса;

[3] Бабански, Ю.К. и др. Педагогика. Москва, София: Прогрес, Народна просвета, 1988.

- Опиране върху миналите знания на учащите се и техния практически опит;
- Използване на задачи, имащи нетривиално решение: задачата трябва да бъде на пръв поглед трудна, но решима с наличните знания;
- Решението на задачата трябва да бъде оптимално и да бъде образец за подражание при разглеждането на други подобни задачи.

Творческият характер е неотменна част на системата задачи и изискванията към всяка от тях. На уроците по математика се прилагат следните *видове творчески задания*:

- Съставяне на задачи от учащите се ;
- Конструиране на обратни задачи;
- Творчески задачи, изискващи самостоятелна постановка и използване на специални и междупредметни знания от обучаваните;
- Различни видове конкурси между учениците или класовете като цяло
- Реферати и доклади;
- Организирането на вечери и празници на математиката;
- Съставяне на тестове за контрол на знанията по предмета и конкретната тема.

Творческият характер на дейностите, извършвани от учащите се при изпълнението поставените задачата се, определя чрез наблюдаване работата на всеки един от тях от гледна точка на:

- ✓ Равнището на мотивация на учащия се ;
- ✓ Оригиналност на метода на решение;
- ✓ Творчество и оригиналност при оформяне на решението;
- ✓ Равнище на използване на междупредметните връзки;
- ✓ Умение за осъществяване на самоанализ на дейността и проявление на начини за оценка на резултатите.

При изпълнението на поставените задачи се осъществява процес на саморазвитие, характеризиращ се с актуализация и мобилизация на творческите сили и способности, както и ръст на познавателната активност на учащите се.

Развитието на творческите способности на учащите се и въздействието на процеса на творческо саморазвитие трябва да протича в атмосферата на психологически комфорт, доверие към учителя, с който ученика може да обсъди своите проблеми и трудности, да прояви своите реални възможности за духовен и интелектуален ръст. Проявявайки добро отношение и уважение към личността на учащите се учителят формира у тях стремеж за самообразование, самовъзпитание, и самоопределяне чрез самопознание.

Анализът на проблема позволява да се направят следните **изводи:**

1. Успехът в работата по развитие на познавателната активност до голяма степен зависи от характера на взаимоотношенията между учителя и учениците. Положителен резултат ще има само тогава, ако тези отношения имат характер на взаимно разбиране и уважение.
2. В своята дейност учителят трябва да отчита противоречивия характер на познавателния процес. Често срещано е противоречието между индивидуалния опит на ученика и придобиваните от него знания. То е добра предпоставка за създаване на проблемна ситуация като условие за развитие на познавателната активност.
3. Учителят трябва акцентира върху доминиращите мотиви, тъй като те са важни за активизиране работата на учениците.
4. Работейки за развитието на познавателната активност на учениците, учителят трябва да отдели много внимание на познавателния интерес. Като външен стимул за учене познавателният интерес е силно средство за развитие на познавателната активност. Педагогическото майсторство на учителя се състои в това, познавателния интерес да стане личностно значим и устойчив за ученика.
5. Важно педагогическо условие за развитие на познавателната активност у учащите се е приучването им към самостоятелна работа. Преподавателят трябва да се стреми към това да обучи учениците да се самообразоват и това да се характеризира със целенасоченост и системност.
6. Учениците ще развият по най-добър начин своята познавателна активност, ако сами „преоткриват” новите знания, а не ги получат наготово от учителя си. Задачата на учителя е да привлече вниманието на учениците и да събуди интереса им към разглежданата тема, като по този начин засили тяхната познавателна активност и те да съумеят сами да поставят проблема. Важен момент е и учителят да определи оптималната степен на трудност на проблемната ситуация (поставената задача да е достатъчно трудна, но същевременно нейното решение същевременно да е по силите на учениците).
7. Подборът на учебното съдържание трябва да става като се отчитат и интересите на обучаваните. Ето защо при подбора на съдържанието на учебния материал, трябва да се

отчита неговата перспективност, практическа и личностна значимост за учащите се и неговата актуалност.

8. Прилагането на активни методи за обучение, адекватни на съдържанието на учебния материал, предизвиква повишаване на познавателната активност на учениците, които се научават да прилагат придобитите знания в нови и необичайни ситуации, т.е. да се развиват елементи на творческото мислене.

9. Повишаването на познавателна активност на учениците се осъществява в рамките на традиционните форми на обучение, съчетани с иновативни елементи. Значителна част от знанията, особено когато учебният материал е достатъчно сложен, може да се получи чрез традиционните методи на обучение. Резултатите от научните изследванията показват, че само умелото съчетаване между иновационните и традиционните методи на обучение води до повишаване на познавателна активност на учениците.

ВТОРА ГЛАВА. ИЗВЪНКЛАСНАТА РАБОТА ПРИ ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

На съвременния етап главна цел на обучението се явява не само придобиването на определен обем от знания, а по-скоро повишаване равнището на интелектуалното развитие на учещия се, т.е. формиране на умения за самостоятелно възприемане, анализиране и осъзнаване на информацията. Изхождайки от това, става много актуално търсенето на пътища за практическо реализиране на придобитите знания, умения и навици.

Изискванията към учениците и учебниците по математика в съответствие с методиката на обучение, са съобразени с възможностите на т.н. „среден“ ученик. Но още от първи клас в масовото училище се забелязва рязко разслоение на ученическия колектив по отношение полаганите усилия при усвояването на предвиденото учебно съдържание:

- ученици, които го правят с лекота и интерес;
- ученици, които постигат успех с цената на огромни усилия;
- ученици, които се справят задоволително.

Това довежда до необходимостта от индивидуализация на обучението по математика и една от формите за това е извънкласната работа по математика.

Под *извънкласна работа по математика* се разбира занятия на учещите се с преподавател в извънурочно време, като те могат да бъдат системни – кръжоци, факултативни занятия, СИП и ЗИП, и периодични – различни състезания и олимпиади, извънкласни четения, вечери на математиката, състезания подобни на известни телевизионни игри, но по конкретна тема от математиката (виж приложение 2.4 игрите „Форд Боярд“ и, „Кой иска са стане богат“) и др. Обикновено се различават две направления на извънкласна работа по математика:

- работа с ученици, изоставащи от другите при усвояването на предвиденото по програма учебно съдържание по математика (допълнителни извънкласни занятия, които понякога са индивидуални)
- работа с ученици, които имат повишен интерес към изучаването на математика (има голямо разнообразие от форми – кръжоци, различни състезания, олимпиади, вечери на математиката, извънкласни четения, а в последните години и участие в разработването на проекти по определена тема и чрез използване на съвременните технологии – дистанционни форми,) и работа с надарени деца.

Традиционно под извънкласна работа се разбира именно работата с ученици, които имат афинитет към предмета математиката.

Вследствие на отчетените слаби резултати от проучването на PISA през периода 2006 – 2009 години редица държави изготвят стратегии или планове за действие, с цел *повишаване равнището на основните умения*, по-специално във връзка с четенето, *математиката* и естествените науки. България участва в тези проучвания, сред които математиката до този момент не е била основна изследвана област. Може, обаче, да се очаква, че резултатите няма да бъдат много по-различни от вече получените. PISA – 2009 ни класира на 46 място от 65 страни, а PISA – 2006 – на 43 място от 57 държави. [4]

В редица документи на ЕС се посочва необходимостта от по-задълбочено проучване на потенциала на новите технологии за укрепване на иновациите и творчеството, за създаване на нови партньорства и персонализиране на образователните потребности. Поради влошаване на резултатите от усвояването на необходимите математическите знания, умения и компетентности се налага набелязването на мероприятия за своевременно попълване на пропуските.

[4] https://www.mon.bg/?go=page&pageId=13&subpageId=245 към 03.2015 г.

2.2. Форми на извънкласната работа по математика и методика на провеждането им

Има различни форми на извънкласна работа за ученици с повишен интерес към математиката: математически кръжоци; математически викторини, състезания и олимпиади; вечерите и празниците на математиката, седмица на математиката; математически „пътешествия“; извънкласно четене на математическа литература; математически реферати и съчинения; разработването на учебни проекти (През последните години особено актуално стана включването на ученици в разработването на учебни проекти по различни теми, тясно свързани с техните интереси.) и най-често срещащи се в масовото училище – СИП и ЗИП.

Фиг. 1.1 Форми на извънкласни на работи по математика за ученици с повишен интерес

Фиг. 1.2. Функции на извънкласните форми на работа

Целите и задачите на ИКРМ придават специфичен характер на функциите на цялостния педагогически процес. Някои от функциите, които изпълняват извънкласните форми на работа са дадени на следващата Фиг. 1. 2.

В процеса на обучение по математика учещите се използват предимно учебниците и сборниците, но допълнителна литература по математика четат много малко и четенето няма организиран характер. Безспорно е значението да се изградят навици у обучаваните да работят с допълнителна литература, тъй като именно тази работата не само повишава качеството на знанията, но и развива у тях устойчив интерес към математиката. Не по-малко обучаващо и развиващо значение имат уменията и навиците за работа с математическа литература.

Факултативните занятия по математика в миналото се провеждаха с учениците след VII клас: с продължителност 1 ч. седмично за VIII клас и по 2 ч. от IX до XI клас.

Главна цел на факултативните занятия е задълбочаването и разширяването на знанията на учениците по математика, повишаване на интереса им предмета, развитие на математическите им способности, събуждане на интерес в учениците за самостоятелни занимания по математика, възпитание и развитие у тях инициативност и творчество, както и умения за работа с научна литература.

На съвременния етап факултативните занятия се отъждествяват със СИП (ЗИП) по математика. В малките населени места могат да се сформират групи от 15 ученика от два класа, например III и IV, IV и V, V и VI и т.н. Сборните групи затрудняват работа на учителя и тук е мястото на диференцирани задачи за отделните участници. Като положителна страна може да се посочи мотивацията на по-малките ученици да усвоят математическите знания от задължителната програма и следващата година да се справят със задачите по разглежданата тема, които на сегашния етап не са по възможностите им.

За разлика от кръжочните занятия, където педагозите имат пълна свобода за избор на учебно съдържание и продължителност на изучаване за дадена тема, то за факултативните занятия има учебни помагала[5] и в тях са разработени конкретни теми. Включеното в тях учебно съдържание разширява познанията на учениците по тема от урочната работа или показва някои приложения на придобитите на тях знания.

[5] Гаврилов, М., Л. Давидов, Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976; Додунеков Ст., Йордан Денев, Кодиране на информацията, НП, С., 1985 и др.

Друга форма на ИКРМ е „Седмица на математиката“. Нейната организация е трудна и изисква много време. В нея участват всички ученици от дадено училище и преподавателите им по математика. Предметната седмица при добра организация може да се превърне в парад на ученическата фантазия и творчество. Организираните мероприятия дават възможност за изява на всеки ученик, дори на по-слабо успяващите.

2.3 Дидактични игри в обучението по математика

Дидактичната игра е обучаваща игра, *за която е характерно*, *че игровият процес се съпровожда с усвояването от играчите на съдържанието на обучението.* Играта, ученето и трудът се явяват основните видове човешка дейност. При това играта готви детето както за учене, така и за труд, самата тя се явява едновременно и учене и труд. Дълбоко е заблуждението да се смята, че играта е само забавление и развлечение. В процеса на играта децата преобразуват различни знания за предметите и явленията от обкръжаващия ги свят. Тя развива детската наблюдателност и способността им да определят свойствата на предметите, да отделят характерните, съществените признаци. Играта оказва голямо влияние за умственото им развитие, усъвършенства мисленето, развива вниманието и творческото въображение.

От всички съществуващи видове игри *дидактичните игри* се използват основно като способ за обучение. Дидактичната игра е вид дейност, в която детето занимавайки се, играейки си – се учи. Тя има своята устойчива структура, която я отличава от другите дейности. ***Основните нейни структурни компоненти*** са: *игров замисъл, правила, игрови действия, познавателно съдържание или дидактични задачи, материали и игров резултат.*

При провеждането на дидактичните игри забавността и *обучението трябва да се съчетават така*, *че да се допълват взаимно. Средствата и способите за повишаване на емоционалното отношение на децата към играта трябва да се разглеждат не като самоцел*, *а като път водещ към изпълнение на дидактичната задача.*

Математическата страна от съдържанието на играта винаги трябва да се изтъква на преден план. Само тогава играта ще изпълни своята роля за математическото развитие на децата и за възпитаване на интереса им към математиката.

При организацията на дидактичните игри с математическо съдържание необходимо е да се помисли и работи върху следните страни от методиката:

Цел на играта. Какви умения и навици в областта на математиката ще усвоят децата в процеса на играта? На кой момент от играта трябва да се отдели по-голямо, по-особено внимание? Какви други възпитателни цели ще се преследват при провеждането на играта?

Брой на играещите. При всяка игра има максимално и минимално количество играчи. Това трябва да се предвиди при организацията на играта.

Необходими ***дидактични материали*** и ***пособия***.

Запознаване на децата с ***правилата на играта*** за ***максимално кратко време***.

Продължителност.

Ще бъде ли достатъчно ***занимателна*** и ***завладяваща***? Ще пожелаят ли децата да я играят и друг път?

Как да се осигури ***участието на всички деца***?

Как да се организира ***наблюдението над децата***, за да сме наясно всички ли се включват в дейността?

Какви ***изменения*** могат да се внесат, за да се повиши интереса и активността на децата?

Какви ***изводи*** следва да съобщят на участниците на финала, след играта (най-добрите моменти, неточностите в играта, резултатът от усвоените математически знания, оценката на отделните участници, забележка по отношение нарушения на дисциплината и други) ?

В приложение 2.4 са разработени игрите: ***Ключ от Форт Боярд*** (Урок-игра по темата “Смесени числа” за 5 клас), ***Математически влак*** Урок-игра (5 – 7 клас), ***Кой иска да стане милионер*** (Урок-игра за учениците от 6 клас по математика”), ***Математически аукцион*** (урок-игра за учениците от 11 клас)

Предложените разработки позволяват да се изменя съдържанието на задачите и по този начин съответната игра да бъде организирана върху материал от друга тема или за ученици от друг клас.

Интересна, занимателна, креативна, обучаваща, провокативна, когнитивна и емоционална може да бъде всяка една преднамерена, планирана дейност по математика, с включена поне една дидактична игра, в която децата, решавайки поставената задача, усвояват и затвърдяват знания, умения и навици. Този избор стои пред всеки учител, който залага на професионализма си в благородната дейност с учениците.

Всички структурни компоненти на играта: *игровия замисъл*, *правила*, *игровите действия*, *познавателно съдържание*, *оборудване и резултати* са взаимосвързани и отсъствието на някои от тях разрушава играта, това означава и урокът.

Целесъобразното използване на дидактическите игри на различни етапи от урока е различна. Например при усвояването на нови знания възможностите за дидактични игри отстъпват други форми на обучение, поради това играта е по-добре да се използва при формиране на умения, изработване на навици, проверка на резултатите от обучението.

Колективните игри в класа следват да се разделят по дидактически цели и задачи в урока. Това преди всичко са обучаващи, контролиращи и обобщаващи игри.

Както е известно, играят не само децата, но и възрастните. Съществуват т.нар. делови игри, в процеса на които на основата на игровия замисъл се моделира реална обстановка, в която се изпълняват конкретни действия, имитират се роли в практическия живот.

Използването на урок-игра при обучението по математика се характеризира положителни качества, като: мотивация за извършваните дейности, доброволно участие и подчинение на правилата, по-висока обучаваща, развиваща и възпитателна функции в сравнение с обикновените уроци.

Някои автори разделят игрите-уроци на ***учебно-ролеви*** и ***съревнователни***. За първите е характерно максимално използване на въображението. Те се разделят на няколко вида:

- игри с приемане на определени ролеви функции от учащите се;
- игри с използване на някакъв сюжет;
- игри с фантазиране;
- делови игри, при които има моделиране на условия за професионални дейности.

За всички игри в обучението е характерно общата структура на учебния процес включваща четири етапа:

Ориентация: учителят определя темата, прави характеристика на играта, обзор на нейните ходове и правила.

Подготовка за провеждане на играта: запознаване със сценария, разпределяне на ролите, подготовка за изпълнението им, осигуряване на процедурите за управление на играта.

Провеждане на играта: учителят следи за протичането на играта, контролира последователността на действията, оказва необходимата помощ, отчита резултатите.

Обсъждане на играта: прави се характеристика на изпълнените действия, анализират се положителните и отрицателните страни на хода на играта, възникналите трудности обсъждат се възможните пътища за осъществяване на играта, в това число и изменения на правилата ѝ.

Разбира се всяка игра, в това число и използваната на урока с цел проверка и затвърдяване на знанията, възпитава не в едно, а в много отношения. Има и игри, които се организират с учащите се в извън учебно време с цел усвояване на норми и правила на поведение, формиране на определено отношение към нравствено-естетическите ценности, труда и др.

Ценността на играта като възпитателно средство се заключава в това, че тя оказва въздействие върху колектива на играещите деца, а педагогът – чрез колектива оказва въздействие върху всяко дете. Организирайки игровия процес, възпитателят формира не само игровите отношения, но и реални, затвърдява полезни навици и норми на поведение у децата в различни условия и вътре в играта. Тя се явява и средство за първоначално обучение. В играта децата отразяват обкръжаващия ги свят и опознават едни или други факти и явления, достъпни за техните възприятия и разбирания.

Предложените дидактични игри в приложение №1 могат да присъстват във различни моменти на обучението по математика със своя възпитаващ и обучаващ характер.

Отчитайки динамиката и сложността на детето като обект и субект в учебната дейност, неговите потребности и интереси, учителят има възможност да предпочете една или друга дидактична игра като се съобрази се с програмното съдържание.

Предлаганите конспекти на занятия са примерни и те не задължават учителите за точното им използване, а позволяват промени на предлаганите задачи и форми на провеждане.

ТРЕТА ГЛАВА.МЕТОДИЧЕСКИ ИДЕИ ПРИ РЕШАВАНЕ НА НЯКОИ КЛАСОВЕ ЗАДАЧИ В ИЗВЪНКЛАСНАТА РАБОТА ПО МАТЕМАТИКА

3.1. Моделът за обучение като систематизиран комплекс от закономерности за учителя и ученика при обучението

Моделът за обучение е систематизиран комплекс от основни закономерности за дейностите на ученика и преподавателя при осъществяване на обучението.

Има различни *критерии за класификация* на моделите.

- ***Класификация на моделите по област на използване***: *учебни модели*; *опитни модели; научно-технически модели; игрови модели; имитационни модели.*
- ***Класификация на моделите по фактора време:*** *статистически и динамични модели.*
- ***Класификация на моделите по сфера на знанието***
- ***Класификация на моделите според начина на представяне:***
- ***По начин на реализация моделите*** биват *мисловни*, *вербални* и *информационни*.

Моделите на обучение постоянно се видоизменят и докато през 80-те години на миналия век проблемно-развиващото обучение се смяташе за иновативно, то на сегашния етап се отнася към традиционните типове. Традиционният процес на обучение (ПО) в настоящия момент се извършва под формата на педагогически или андрагогически модел.

В педагогическия модел на обучение доминираща роля заема ***обучаващият***. Именно той определя всички параметри на ПО – цели, съдържание (до определена степен), форми и методи, средства и източници за обучение. Влияние оказват и обективни фактори като неформираната личност на обучаваните, зависимост от икономическото и социа**л**ното им положение, малкият жизнен опит, липсата на сериозни проблеми, за решаването на които е необходимо да учат. Обучаваните в педагогическия модел заемат подчинено, зависимо положение и нямат големи възможности да оказват влияние върху планирането и оценяването на ПО. Тяхна основна роля е възприемане на социалния опит, предаван от обучаващия.

Базова основа за разграничаване на моделите е характера на учебната дейност. Могат да се посочат два такива ориентира: 1. следването на определени стандарти (репродуктивна дейност, усвояване и възпроизвеждане от учещите се на фиксирани знания и начини за действия); 2. продуктивна, изследователска дейност насочена към създаване от учениците на нов продукт, преди всичко интелектуален. Допълнителни характеристики на модела за обучение могат да бъдат естеството и последователността на етапите на обучение във времето характера на взаимодействието между учителя и учениците, типични похвати за реагиране на учителя при различни действия на учениците, характеристика на очакваните резултати от обучението (педагогическа насоченост на модела). В рамките на всеки от базовите модели се провеждат дидактически търсения на иновационни направления, преобразуващи характера на обучението, при това линията на преобразуване е свързана с както с типовете преобладаваща дейност на учещите се, която организира педагога, така и с характера и значението на позициите на учители и ученици.

Моделът за обучение представлява схематично изобразяване на учебния процес, планиран, организиран и реализиран от педагог.

Като използваме критерия „взаимоотношение между обект и субект” в учебния процес, могат да се посочат три основни модела за обучение: ***пасивно обучение, активно обучение*** и съвременните условия на информационна пренаситеност най-ефективен е ***интерактивният модел*** за обучение. На всеки модел съответства подход в обучението.

В продължение на десетилетия в педагогиката се правят различни предложения за преодоляване на противоречието между предварително определеното и структурирано учебно съдържание и необходимостта от свобода и гъвкавост в подбора на видовете дейности на ученика и тяхното съдържание в съответствие с изменящите се обстоятелства и потребности.

На интерактивния модел за обучение съответства дейностния подход и ученикът преминава от състояние „Мен ме учат!“ в „Аз уча!“. Тук главната задача на учителя е да създаде максимални условия за такава дейност.

На активното обучение съответства ***задачния*** подход. Тук стъпка по стъпка учителя поставя пред учениците диференцирани задания, които са по техните възможности, т.е. построява се някакъв алгоритъм за обучение.

В педагогическата практика учителите рядко използват само един подход за обучение. Например, за организиране на интерактивното обучение е необходимо определено базово равнище на знанията, което най-често се достига чрез прости методи на запомняне, а понякога дори и зазубряне.

Често за систематизиране на знанията е необходим ясен алгоритъм. Тогава учителят използва задачния подход.

Важното е да не се поставят учителите в тесни рамки, а да мога свободно да избират модела за обучение в зависимост от личните си качества и индивидуални възможности на учениците.

На задачите в обучението по математика се е отделя достатъчно голяма, но не и решаваща роля. На съвременния етап все повече се разпространява прогресивният метод на обучение чрез задачи, където задачите са не толкова цел, колкото средство за обучение.

Разнообразни ситуации (възникващи върху математически и друг материал) довеждат както до стандартни, така и до нестандартни задачи, чиито алгоритъм за решение е неизвестен или не съществува. Именно по отношение на нестандартните задачи възниква необходимостта от търсенето на вариативно решение. Задачата предполага потребност от съзнателно търсене на подходящо средство за постигане на ясно видими, но не са пряко достъпни целите и решението ѝ.

Решаването на задачите изисква използване на множество мисловни умения: да се анализира дадена ситуация, да се съпоставя дадено и търсено, дадената задача с решавани по-рано, за да се идентифицират скритите свойства на дадена ситуация; да се конструират прости математически модели. В процеса на решението учениците синтезират и изберат полезната за решаване на задачите информация, систематизират я за да представят решението кратко и ясно, като текст, изграждат умения за символично, графични и т.н. представяне на решението, правят обективна оценка на получените в резултати и ги анализират. Това показва необходимостта да се вземат предвид съвременните постижения на психологията за формиране на умения и навици при обучаването в решаване на математически задачи.

Математическите задачи са ефективно и често незаменимо средство за усвояване от учениците на учебното съдържание и методите на урочна и извънкласна дейност. Правилната методика на обучение в решаването на задачи играе съществена роля във формирането на математическите знания, умения и навици на високо равнище.

3.2 Задачите в обучението по математика

Съдържанието на обучението, по който и да било предмет, в частност и по математика, включва система от специфични знания, умения и компетентности но липсват система от знания и съответстващите им начини на логическо мислене, без които знанията по нито един предмет не могат да бъдат усвоени и приложени.

В учебниците и методичната литература за учителя много ясно е посочено ***какво трябва да знае и може*** ученикът, но липсва каквато и да било информация ***как*** да стане това, т.е. какви похвати да използва. При тази ситуация едва ли може да се разчита, че ученикът успешно ще изпълни поставените му учебни задачи.

Необходимо е *чрез средствата на самото учебно съдържание да се разкриват начините за неговото усвояване*, които трябва специално да бъдат отделени от съдържанието на учебния материал и предоставени на учениците за усвояване.

Отговорът на въпроса: как да се организира процесът на усвояване на знанията е заложен в самата същност на ***учебната задача***.

Посочени са три различни трактовки на ***понятието задача*** и три направления за употреба на понятието „задача“ относно позицията на обекта:

- Задачата е цел за действие на субекта, т.е. това са изисквания поставени пред субекта.[6] Ситуация, включваща не само целта, но и условията, в които целта трябва да бъде достигната[7]

[6] А.Н. Леонтев, "Деятельность, сознание, личност." http://azps.ru/hrest/59/4741188.html към V. 2015 г.
[7] Ю.М. Колягин, П.М. Эрдниев - Составление математических задач как инструмент развития универсальных учебных действий на уроках математики основной школы - http://www.portal-slovo.ru

• Задачата е „изискване или въпрос, на който трябва да се намери отговор, опирайки се и отчитайки условията дадени в задачата.[8]

Прецизно изработена система от учебни задачи, които да изискват от учениците както специфични, така и общологически учебни дейности, дава възможност за намиране на общ начин на подхождане към решаването на много конкретно-частни задачи от определен клас.

Разграничават се три исторически етапа от използването на задачите в обучението по математика:

1. *Изучаване на математиката с цел обучение в решаване на задачи*.
2. *Обучение по математика, съпровождано с решаването на задачи.*
3. *Обучение по математика чрез решаване на задачи.*

За да се научат да решават задачи, учениците трябва да са наясно какво представляват задачите, каква е структурата им, кои са съставните им части, с какви инструменти може да се намери решението. Формулировката на всяка задача съдържа твърдения и изисквания.

Основни компоненти на задачата са:

- *Условие на задачата* – това са твърденията във формулировката ѝ.
- *Теоретично обосноваване на решението* – база на решението.
- *Решение* – преобразуване на условията на задачата (или следствията от тях) чрез прилагане на определения, теореми, аксиоми, правила, формули и т.н. за да се намери търсенето в задачата.
- *Заключение* – крайната цел, това което трябва да се пресметне (преобразува, докаже, построи).

Логическа структура на задачите – във всяка задача се посочват един или няколко обекта на задачата (числа, фигури, предмети) и за всеки обект в задачата се определят количествени или качествени характеристики, явно или неявно зададени под формата на въпроси или условия.

Понякога е трудно да се разграничат условието и заключението, както в:

Задача[9] 1. *Колко цифри съдържа числото 2^{20} в десетична бройна система*?

Формулировката ѝ се състои от един въпрос. В него могат да бъдат разграничени две *условия*: 1) Числото 2^{20} е естествено число и 2) може да се запише като многоцифрено число в десетична бройна система. Очевидно тук могат да бъдат отделени и др. условия, например 2^{20} е произведение на числото 2 само със себе си 20 пъти и т.н.

Тогава *изискването* (заключението) на тази задача е да се намери колко цифри съдържа десетичния запис на многоцифреното число.

Забелязва се, че *всяка задача представлява изискване или въпрос, на който трябва да се намери отговор, чрез позоваване на изискванията и данните зададени в условието на* задачата.

Мястото и *функциите* на задачите в ОМ се определят в зависимост от целите на обучението и могат да имат образователно, възпитателно и практическо значение.

Учебните цели, които се преследват с решаването на задачи са:

•*формиране* на интерес и мотивация у учениците за математическа дейност;

•*илюстрация и конкретизация* на изучавания учебен материал;

•*изработване* на специфични умения и умения;

•*контрол и оценка* на знанията, уменията на учениците и на резултатите от тяхната дейност.

Под *функция* на задача се разбира проектирано от учителя изменение в дейността и психиката на ученика.

На съвременния етап при обучението по математика задачите играят двустранна роля: те са както цел, така и средство за обучение.

Функциите на задачата като цел на обучението са усвояване на: понятието задача, нейната структура и компоненти; същността на процеса на решение; техники за работа с

[8] Ю.М. Колягин, П.М. Эрдниев - Составление математических задач как инструмент развития универсальных учебных действий на уроках математики основной школы - http://www.portal-slovo.ru

[9] Номерацията на задачите не е последователна и отговаря на тази от дисертацията

текстови задачи; методи за решаване на отделни видове задачи; усвояване на общи методи за търсене на решения.

Функциите на задачата като средство за обучението са: формиране на знания, умения и навици; подготовка за извършване на различни математически дейности; формиране на умения за моделиране на явления и процеси от действителността; развитие у учениците на качества на мисленето като гъвкавост, бързина, гладкост и т.н. възпитаване на организационни и комуникативни качества.

Трябва да се имат предвид следните обстоятелства:

1) Повечето математически задачи са *полифункционални*, т.е. една и съща задача може да изпълнява едновременно различни функции, т.е. в резултат на това решение могат да настъпят не една, а няколко промени.
2) Сред всички функции винаги може да се отдели главната, заради която се решава задачата.
3) Всяка типология или класификация е условна.
4) Всяка математическа задача притежава признаци от различни класификационни схеми.

На Фиг. 3.1 в приложение 3.1 са дадени класификации на задачите по някои критерии.

Евристична задача – задача със скрити връзки между елементите или начина за решаване, които не са конкретизация на общо правило. Например такава е следващата:

Пример 1. (Варна, 1991, 6 клас) *Осем деца имат общо* 719 *ореха, като всеки две от тях имат различен брой орехи. Известно е, че едното от всеки две произволно избрани деца има цяло число пъти повече орехи от другото. По колко ореха има всяко дете?*

Решение. Първичният анализ позволява да се отделят няколко условия:

1) Осем деца имат общо 719 ореха;
2) Всеки две деца имат различен брой орехи;
3) Едното от всеки две произволно избрани деца има цяло число пъти повече орехи от другото;
4) Търсят се броят орехи A_1, A_2, …, A_8, които притежава всяко дете.

Тези условия не позволяват да се посочат търсените числата. Това налага да се преформулират условията на задачата, като се потърсят връзки между тях.

Нека децата са номерирани така, че всяко следващо има повече орехи от предишните. От условие 3) може да се направи извод, че ако броят на орехите на първото дете е $A_1 = x_1$, то броят на орехите на второто дете ще е $A_2 = x_1 x_2$, и т. н. на последното дете – $A_8 = x_1 x_2 ... x_8$. По този начин задачата от търсене на A_1, A_2, …, A_8 се преформулира в търсене на числата $x_1, x_2, ..., x_8$. ……(Подробен анализ е даден в дисертацията на стр. 67-68)

При обучението по математика често за характеристика на задачите се използват понятията *сложност* и *трудност*.

Сложност – това е обективна характеристика на задачата, зависеща от броя на обектите в задачата, от количеството и характера на връзките между обектите, от конструкцията на текста, от езика, на който е приведена формулировката и т.н.

Трудност – това е субективна характеристика на задачата, зависеща от знанията, уменията и опита на решаващия задачата субект, от нивото на неговите интелектуални умения, свързани с типологични свойства на личността, с нейния жизнен опит и т.н.

Има различни трактовки на термина „*решение на задача*“:

- *Решение на задачата* – план (начин, метод) за изпълнение на изискванията в задачата;
- *Решение на задачата* – процесът на изпълнение на плана, което води до осъществяване на изискванията в задачи.
- *Решение на задачата* – резултат от изпълнение на плана, реализиращ изискванията в задачата.

Да се направи ***анализ*** на една задача означава да се разкрият обектите участващи в условието на задачата, да се посочат характеристиките им (във вид на свойства на обекта или релациите между обектите, ако са повече от два).

При елементарните задачи анализа се прави устно в хода на решението. При достатъчно сложни задачи определянето на обектите, характеристиките им и релациите между тях са предпоставка за намиране на решението.

Пример 2. *Намерете трицифрено число по-голямо от 300 и по-малко от 400, което при деление на* 9 *има остатък* 2*, при деление на* 5 *остатъкът е* 3*, а при деление на* 7 *остатъкът е* 2?

Първичният анализ позволява в тази задача да се отделят няколко условия:

1) Търсим трицифрено число *x,* което

   А) при деление на 9 има остатък 2;

   Б) при деление на 5 има остатък 3;

   В) при деление на 7 има остатък 2

2) *x* е най-малкото трицифрено число с това свойство.

Естествено тези условия не позволяват да се посочи числото. Това налага да се преформулират условията на задачата, като се потърсят връзки между тях.

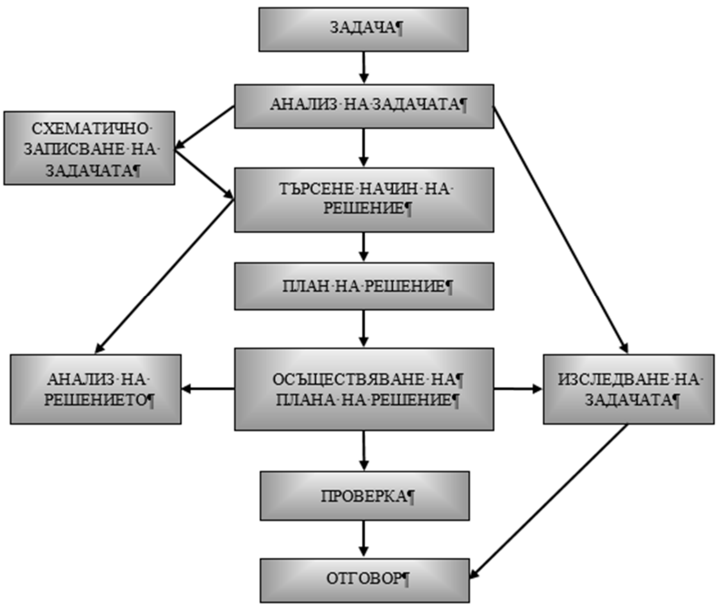
От 1А) и 1В) може да се направи извода, че ако от числото x извадим 2, то полученото число ще се дели на 7 и на 9 едновременно. Понеже 7 и 9 са взаимно прости числа, то (x – 2) ще се дели на произведението им 63 = 7.9. Ето защо числото (x – 2) е трицифрено и е от вида 63k, $(2 \le k \le 15)$.

От условие 1Б) може да се направи извода, че числото (x – 3) се дели на 5, т.е. неговата последна цифра е 0 или 5. Ето защо числото x е с цифра на единиците 3 или 8. Аналогично числото (x – 2) ще има цифра на единиците 1 или 6.

Числото 63k ще има цифра на единиците 1, ако k = 7, 17, 27, … и само k = 7 удовлетворява условието $400 \le 63k + 2 \le 500$, т.е. x = 443.

Числото 63k ще има цифра на единиците 6, ако k = 2, 12, 22, … и няма такова число k, за което да е изпълнено условието $400 \le 63k + 2 \le 500$.

Изложението на решението на задачата не дава отговор на въпроса как е намерено решението, вярно ли е? Следователно, ако процесът на решението на задача започва от получаването ѝ до момента на завършване на решението ѝ, то процесът на решаване се състои от няколко етапа, един от който е описание на решението. Според Л. М. Фридман решението се състои от осем етапа. Структура на процеса на решаване на задача (по Л. М. Фридман) се вижда от схемата на Фиг.3.2.1.



Фиг. 3.2.1 Етапи на решението на задачата

Уменията за решаване на задачи зависят от :

- ясната представа за същността и основните обекти на задачи;
- владеенето на основните действия и операции, които се прилагат при решаване на математически задачи;

• познаването на основните методи за решаване на задачи и формиране на умения и способности да се прилагат.

Обща идея при решаване на една задача е свеждането ѝ към една или няколко решени по-рано задачи.

• *Начинът* (похватът) за решение е съвкупност от действия за решаване на конкретна задача.

• *Методът за решение* е обща схема, върху която са построени похватите за решаване.

• *Метод на разделяне на задачата на подзадачи* – същността е в това, че сложна задача се разбива на няколко по-прости задачи, по възможност на стандартни задачи, при последователното решение, на които се решава дадената задача.

Фиг. 3.2.2 Схема за разбиване на задача на подзадачи

• *Метод на преобразуване на задачата* – състои в това, че с помощта на някакъв похват задачата се преобразува в по-проста, понятна или по-известна, но в еквивалентна на нея задача чрез запазване на езика на задачата или чрез замяна (например словесното описание се заменя с схематичен запис).

• *Метод на въвеждане* (построение) *на допълнителни* (помощни) *елементи* и се състои в разширяване на броя на обектите в задачата. Този метод се прилага, ако има неопределеността на елементите или връзката между тях не е очевидна. Въвеждането на допълнителен елемент се извършва с цел превръщане на задачата от неопределена в определена или за доближаване на даденото и търсенето.

Извод: *От позиция на съвременните изисквания към процеса на обучение, уменията да се решават задачи трябва да се разглеждат като резултат от синтеза на знанията и уменията.*

Основни насоки за усъвършенстване на методиката за обучение на учениците в решаване на задачи са:

• *Преодоляване на стихийността* при формиране на ориентировъчната основа за решаване на задачи, създаване на трайна рамка за решаване на задачи.

• *Изместване на акцента* от дидактическата върху познавателната функция на обучение за решаване на задачи.

• *Формиране у учещите* се не само на частни умения за решаване на типови задачи, но и на *общи умения* за решаване на произволни математически (в това число и на приложни) задачи.

• *Диференциране* на процеса на обучение в решаване на задачи.

Формите на организация за обучението в решаване на задачи са дадени в следващата таблица 3.2.1:

Фронтално решаване на задачи	*Индивидуално решаване на задачи*
• Фронтално устно решаване на задачи по предварително подготвени на материали и чертежи; • Фронтално решаване на задачи със записване хода на решението от учителя или отделни ученици; • Самостоятелно решаване с последваща фронтална проверка на решението.	• Самостоятелно изпълнение на общи задания с оказване на диференцирана помощ; • Самостоятелно решаване на диференцирани задания с последващо обсъждане на методите за решение; • Решаване на домашни работи; • Индивидуално решаване на задачи за попълване на пропуски

Таблица 3.2.1 Формите на организация за обучението в решаване на задачи

Учебно-познавателния анализ е най-важният етап от решението на математическата задача и той включва:

• обсъждане на действията по търсене на решението (как е възникнала идеята за решаване на задачата? Какво е помогнало за намиране на решението?

• изясняване на връзките с по-рано решавани задачи;

• търсене и намиране на други начини за решаване на задачата, сравняването им и избор на оптимално решение от гледна точка на изразходваното време за намиране на решението;

• направа на изводи от извършената работа, констатиране в кои случаи може да се приложи намереният начин за решаване.

Необходимо е да се има предвид, че

- за решаването на много задачи се прилагат не един, а няколко общи метода;
- за решаването на една задача има не един, а няколко начина;
- начинът за решение зависи от прилаганите общи методи и последователността на прилагането им;
- съществуват и някои по-малко общи методи или похвати (например метода на изчерпването – проба-грешка).

3.3 Изучаване на елементи от теория на графите в ИКРМ

Темите, свързани с теория на графите и принцип на Дирихле не са включени в задължителното учебно съдържание, но се дават на различни конкурси.

Запознаването с тези теми е възможно и при най-малките ученици. Те лесно се усвояват от тях, тъй като не изискват специална предварителна подготовка по математика. Необходимо е обаче задачите да са подходящо подбрани за съответната възраст.

Занятията се различават от уроците в клас, както по съдържание, така и по използваните средства за решаване на задачи, което ги прави интересни и привлекателни учещите се и съдейства по този начин за повишаване на интереса им към математиката.

При по-малките ученици чрез задачи се въвеждат новите понятия и свойства, а на следващ етап от извънкласните форми на работа, някои от тях могат да бъдат доказани.

Една от целите при изучаването на графите е учениците да придобият умения да виждат графа в условието на задачата и грамотно да превеждат условието на езика на графите.

Приложенията на графите за решаване на задачи са разгледани в няколко направления:

1) решаване на логически задачи чрез графи;
2) решаване на комбинаторни задачи чрез графи;
3) решаване на задачи от спортни срещи и ръкостискания;
4) чертане на фигури на един дъх;
5) решаване на задачи от движение, работа, пълнене на басейни и др. чрез графи;
6) намиране на най-кратък път в граф (метод на Дийкстра);
7) лабиринти и маршрути.
8) решаване на някои аритметични задачи

Понятието граф е целесъобразно да се въведе след решаването на задачи подобни на следващите, в които е важно графичното представяне на данните за решаването на задачата.

На базата на конкретни примери се въвеждат понятията: върхове на графа, ребра на графа; степен на връх, пълен и непълен граф, свързан и несвързан граф, изолиран връх, път в граф, цикъл, дължина на цикъл и някои техни свойства, доказани от автора по начин съобразен за съответната възрастова група.

Разгледани са задачи включени в учебници, учебни тетрадки, сборници, допълнителни учебни помагала за извънкласна работа по математика, а също така занимателни и логически задачи, давани на математически състезания и олимпиади, които могат да се описват и решават по-лесно чрез графи и таблици.

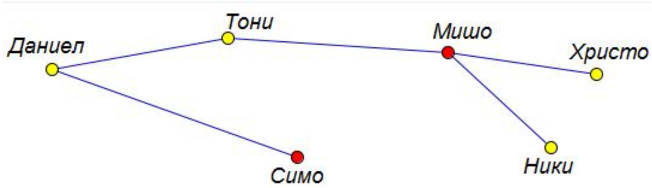
Графите в неявен вид се използват напоследък на някои места в учебните пособия за началното училище, но не достатъчно. Разглеждането на задачи подобни на следващата илюстрират предимството при използването на граф.

Задача 1. *Подозират 6 участника в измама. Известно е че само двама от тях са участвали. На въпроса „Кой е участвал?“ пет от тях дали следните отговори:*

***Даниел**: Тони и Мишо;* ***Христо:** Мишо и Ники;* ***Симо:** Даниел и Тони;*
***Мишо**: Даниел и Симо;* ***Симо:** Даниел и Тони.*

Ако 4 от отговорилите са назовали вярно само единия от участниците, а един от тях е посочил невярно и двете имена, да се намери кой е извършил кражбата?

Решение. Задачата се решава лесно, ако се построи граф – върховете, на който са имената на заподозрените, а ребрата свързват имената от предположенията. Получава се Фиг. 3.3.22



Фиг. 3.3. 22

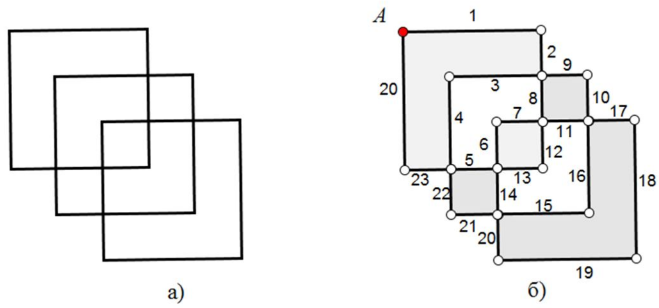
Анализирайки задачата от условието *„4 от отговорилите са назовали вярно само единия от участниците“* може да се направи извод, че от търсените две точки трябва да излизат общо 4 ребра. Освен това тези точки не трябва да са свързани помежду си, защото няма заподозрян, който да е посочил имената и на двамата участници. Това може да се разглежда като скрито условие.

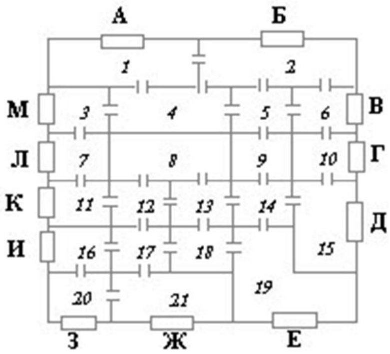
На тези условия отговарят имената Симо и Мишо, т.е. те са извършили кражбата.

По този начин могат да бъдат решени някои от задачите за „рицари и лъжци“ от приложение № 3.2

С пълен граф могат да се описват всякакви игри от групата всеки срещу всеки.

Известна е задачата на Луис Карол, който често давал на приятелите си да начертаят квадратите, показани на Фиг. 3.3.35 а), без да вдигат молива от хартията.





Фиг. 3.3.35 Фиг. 3.3.38

Решението на задачата е лесно, ако се позволява пресичане на линиите, но макар и по-трудно, става по-интересно, ако това е забранено.

Задачата за даден граф може да се постави и така: През всеки връх на графа да се премине само по веднъж и да се обходят всички върхове. *Такива маршрути на графа се наричат* **Хамилтонови.** Такава е

Задача 14. *На Фиг. 3.3.38 е даден план на подземието на рицарски замък и в една от крайните стаи е скрито съкровището. За да се проникне в тази стая е необходимо да се премине през всички 29 врати. След преминаването през една врата тя се затваря и през нея не може да се премине повторно. Определете стаята, в която е скрито съкровището и възможно ли е то да се вземе, ако за начало може да изберете произволна стая в замъка, а напускането може да стане през една от вратите означени с буква (ключа от стаята получавате предварително).*

Чрез графи лесно могат да се моделират задачи от движение, работа, пълнене на басейни и др.

Задача 17. *Велосипедист изминал участък от 28 км като се спускал по наклон и още 25 км се изкачвал за 3ч. и 36 мин. С каква скорост се е изкачвал велосипедистът, ако е известно, че скоростта на спускане е 1,4 пъти по-голяма отколкото на изкачване?*

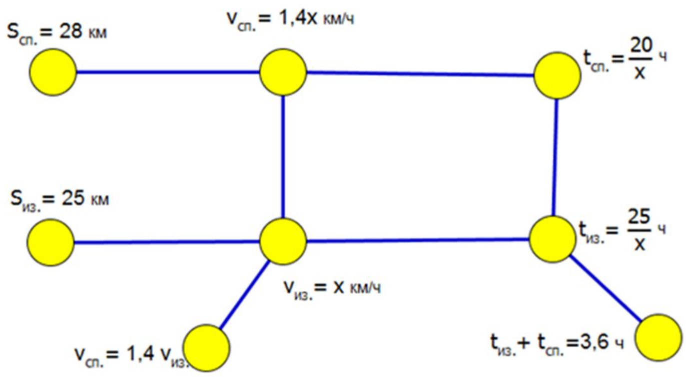
Решение. Анализът на задачата може да се направи като се поставят последователно въпросите:

1. За какво действие става въпрос в задачата? (За движение).
2. Какви са величините, които го характеризират? (Път **S**, скорост **v** и време **t**).
3. Какви са връзките между тези величини? (**S = v.t**).

4. Колко различни движения се описват? (Две – спускане и изкачване).

5. Има ли връзка между елементите и каква за всяко от движенията? (S = v.t; v = S : t и t = S : v.)

Използва се връзката S = *v.t* между величините път, скорост и време. След отговарянето на въпросите се прави анализ на условията на задачата: Ако скоростта на изкачване се означи с *x* км/ч, то скоростта на изкачване е 1,4 *x* км/ч и необходимото за това време е $28:1{,}4x=20:x$, а времето за изкачване е $20:x$. Понеже времето за изкачване и спускане е 3,6 ч., то уравнението е $\frac{28}{x}+\frac{20}{x}=3{,}6$ и неговото решение $x=12{,}5$ км/ч. Тези данни се записват схематично с граф (Фиг. 3.3.47). На „първия ред“ върховете на графа са пътя, скоростта и времето при спускане, на „втория ред“ – при изкачване, а на третия – връзките (в случая $v_{сп.}=1{,}4v_{из.}$ и $t_{сп.}+t_{из.}=3{,}6км/ч$. Този начин на онагледяване е по-лесен за учениците. Избягва се стандартното подреждане на данните в таблица, т.е. отпада трудността какви редове и стълбове да съдържа таблицата.



Фиг. 3.3.47

Комбинаторика се изучава в 10 клас, но чрез използването на графи лесно се решават някои задачи дори от ученици в началното училище. Такъв пример е следващата задача.

Задача 23. *На 3 картончета е изписана цифрата 5 и на 2 картончета цифрата 1. Колко различни 5-цифрени числа могат да се изпишат с тези цифри, като се подредят картончетата едно до друго?*

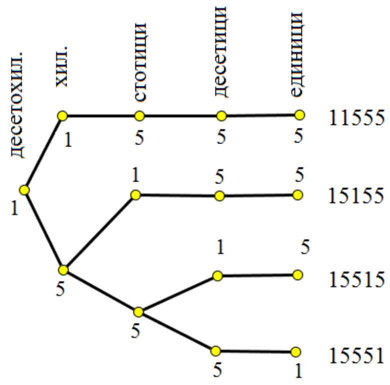
Решение. Учениците могат да се насочат към разсъждения от вида:

Какви възможности имаме за цифра на десетохилядните? (1 или 5) (Фиг. 3.3.53 а)). Ако цифрата на десетохилядните е 1 колко може да бъде цифрата на хилядните? (1 или 5). Ако първите две цифри на числото са 1, то следващите три са равни на 5. Ако цифрата на десетохилядните е 1, на хилядните – 5, то колко може да бъде цифрата на стотиците? (1 или 5) и т. н. Ако първите три цифри са 151, то последните две са равни на 5. Ако първите три цифри са 155, то за последните две цифри има две възможности 1 и 5 или 5 и 1.

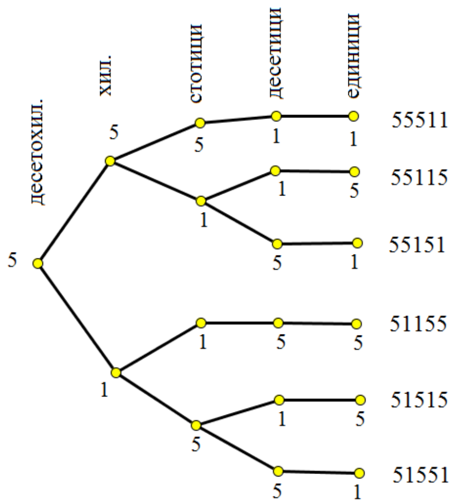
Получиха се 4 числа: 11555; 15155; 15515 и 15551.

Аналогични са разсъжденията и при първа цифра 5 (Фиг.3.3.53 б).

Построяването на двата графа-дърво показва, че всички възможни 5-цифрени числа са 10.



Фиг. 3.3.53 а)

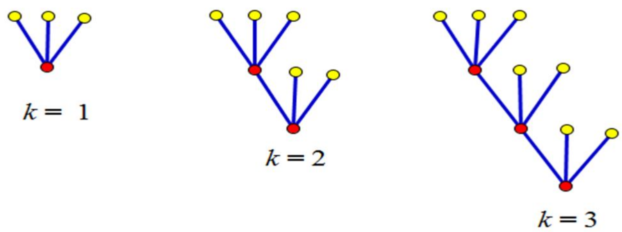


Фиг. 3.3.53 б)

Тази задача е от съединения с повторение, а такива в задължителната програма не се изучават. Използването на графи позволява решаването на такива задачи от по-малки ученици. Нещо повече построяването на графа-дърво е лесно за тях и спестява словесното обяснение, което е проблем при по-малките.

Задача 27. [**авторска**] *Сестрата на Ани разрязала лист хартия на 3 части. Някое от получените парчета отново разрязала на 3 части и т.н. На колко парчета е разрязан листа след 3 такива срязвания? А след k? Ако броят на получените парчета е 17 колко е броят на срязванията?*

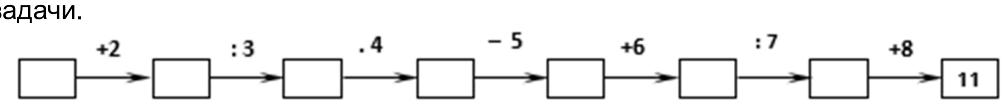
Решение. От Фиг. 3.3.58 се вижда, че при всяко срязване броят на парчетата се увеличава с 2. След 3-тото срязване парчетата са 7. Изобщо след k срязвания броят на парчетата е $1 + 2k$. Ако броят на парчетата е 17, а срязванията са x, то x се намира от равенството $1+2x=17$. Следователно броят на срязванията е 8.



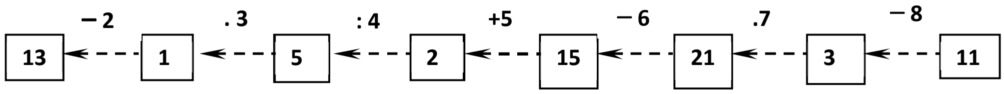
Фиг.3.3.58

Задача 28. (конкурсна, 3 клас [126]). *Третокласничката Недка си намислила число. Тя прибавила към него 2, полученият сбор разделила на 3, после умножила с 4, извадила 5, прибавила 6, резултатът разделила на 7 и като прибавила 8 получила най-малкото двуцифрено число с еднакви цифри. Кое число е намислила Недка?*

Решение. Тази задача може да се реши в по-горните класове като се използва уравнение с едно неизвестно. Ето как тя може да бъде решена и от ученик в трети клас. Означава се с квадратче намисленото от Недка число. Над всяка стрелка се посочва какво действие трябва да се извърши, за да се получи следващото число. Получава се схемата от Фиг. 3.3.59. Тръгва се от последното число 11 и чрез замяна на всяко действие с “обратното” му се намират последователно числата в квадратчетата от Фиг. 3.3.60. Така се намира, че намисленото от Недка число е 13. Може по преценка на учителя да се съобщи на учениците, че този начин за решаване на задачи се нарича ***метод на обратните действия*** или ***метод на инверсията.*** С този метод малките ученици могат да се решават и много по-сложни задачи.



Фиг. 3.3.59



Фиг. 3.3.60

Намиране на изход от лабиринт е друго приложение на теория на графите.

В миналото се е смятало, че ако човек попадне в лабиринт той няма да може да излезе от него, освен случайно или по силата на някакво чудо. Дори са правени опити за съставяне на лабиринти без изход. Днес има известни начини за излизане от лабиринта. Разгледани са два от тях и правилата за намиране на изход от лабиринт.

Правилото на едната ръка не е универсално, но в много случаи то може да е полезно за намиране на път в лабиринт.

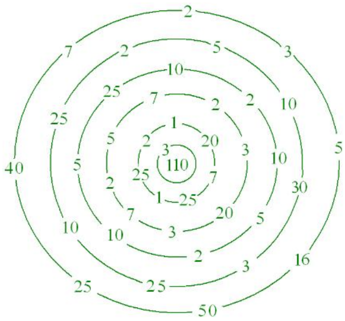
Задачите за лабиринти и маршрути са разнообразни и някои от тях са разгледани в дисертацията.

Задача 34. *Предложете три маршрута към центъра на лабиринта от Фиг. 3.3.67, такива че сумата от числата записани на входовете, през които ще се премине да е:*

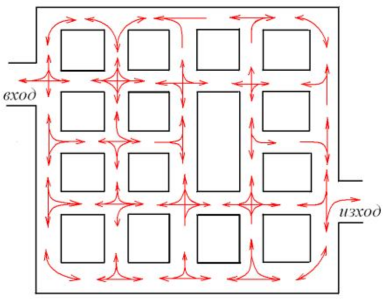
а) най-малка; *б) най-голяма;* *в) равна на 110.*

Отг. а) 2+2+2+2+1+3 = 12; б) 50+30+25+20+25+3 = 153; в) 40+10+25+7+25+3.

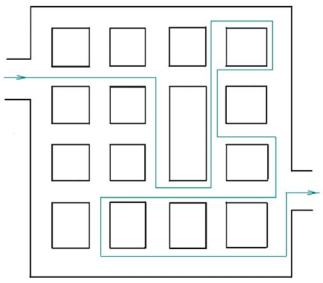
Задача 36. *Кметът на един град решил да увеличи приходите на кметството за сметка на шофьорите, които минават през града. Той наредил да поставят на всяко кръстовище пътните знаци по такъв начин, че шофьорите да бъдат принудени да ги нарушават, а на всяко кръстовище поставил полицай, който да ги глобява. На Фиг. 3.3.69 а) е показан план на града, а със стрелки са указани посоките, в които е разрешено движението. Ако дъгичката или отсечката не завършват със стрелка, в тази посока движението не е разрешено. И все пак се намерил шофьор, който влязъл и излязъл от града, без да нарушава правилата за движение. Какъв маршрут той е избрал?* (Примерен маршрут е даден на Фиг. 3.3.69б)).



Фиг. 3.3.67



Фиг. 3.3.69 а)

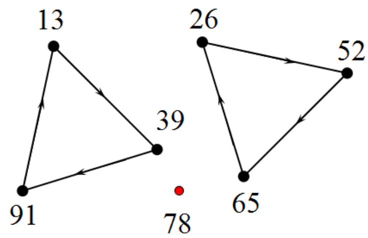


Фиг. 3.3.69 б)

Чрез графи лесно се моделират някои задачи от делимост подобни на следващите.

Задача 41. *В 10-цифрено число всеки две последователни цифри образуват двуцифрено число, което се дели на 13. може ли сред тези 10 цифри да се намира числото 8?*

Решение. Най напред ще намерим двуцифрените числа, които се делят на 13. Те са 13, 26, 39, 52, 65, 78 и 91. На фиг. Фиг. 3.3.73 тези числа са изобразени с точки и ще свържем с ориентирана отсечка → (посоката е от първата към втората) две точки само, ако втората цифра на първото число е равна на първата цифра на второто. Тогава на всяка от деветте двойки съседни цифри в 10-цифреното число ще



Фиг. 3.3.73

съответства точка. Точките съответни на две съседни двойки имащи обща цифра трябва да са свързани с линия. Цифра 8 съдържа само числото 78 и съответната му точка не е свързана с друга точка. Следователно цифрата 8 не може да се съдържа в 10-цифреното число. Нещо повече, от фигурата се вижда, че имаме два триъгълника и оттук лесно може да се заключи, че всяко едно число удовлетворяващо условието на задачата ще съдържа една от двете последователности от цифри ...139139... или ...265265..., т. е. всички възможни числа са:

1391391391, 3913913913, 9139139139, 2652652652, 6526526526, 5265265265.

Допълнителни задачи по темата могат да се намерят в приложение 3.3

Опростяването на предложения за изучаване материал е една от първостепенните задачи на методиката на преподаване. Именно опростеното изложение дава възможност редица въпроси да се предложат за изучаване по-рано, да се пренесат в по-малките класове. Такова "пренасяне", при неговото обосноваване, се явява основен резерв за усъвършенстване на математическото образование. Чрез разгледаните по-горе задачи учениците се обучават да построяват математически модели подобни на реални явления и ситуации. В по-малките класове се отделя повече внимание на овладяването от учещите се на математическите методи за търсене на решение чрез логически разсъждения и построяването на математически модел на разглежданата задача.

Предложеният за разглеждане материал е ярка илюстрация за прилагане принципите за достъпност и нагледност в обучението по математика и как математическия модел на задачата подсказва решението или дава идея за намирането му. Всичко това допринася за повишаване на интереса на учениците към математиката.

Извънкласните форми на работа позволяват чрез спецификата си да се отдели значително внимание на възпитанието и формирането на личността. Според известният руски психолог Крутецкий развитието на творческите способности на учениците е свързано със самостоятелно творческо овладяване на математиката, с намирането на пътища и методи за решаване на несложни математически проблеми и оригинални начини за решаване на нестандартни задачи.

3.4. Прилагане принципа на Дирихле при решаване на някои задачи в ИКРМ

Принцъият на Дирихле е приложим при решаване на разнообразни задачи. Темата не е включена в задължителната програмата по математика. За изучаването ѝ обаче не се изискват задълбочени знания от задължителния курс по математика на учениците в 4 – 5$^{\text{-ти}}$ клас. Това позволява нейното разглеждането в по-ранна възраст.

Принципът на Дирихле е отдавна известно твърдение за крайните множества. Точната му формулировка е**:** *Нека A и B са непразни крайни множества и броят на елементите на A е по-голям от броя на елементите на B. Ако по някакво правило всеки елемент на A се съпоставя на елемент от B, то съществува елемент на B, на който са съпоставени поне два елемента от A.*

Често елементите на *A* се отъждествяват с "предмети", а тези на *B* – с "чекмеджета", затова твърдението е известно още и като **принцип на** "***чекмеджетата***".

Точната формулировка на твърдението не може да се даде на учениците от 4$^{\text{-ти}}$ клас. Запознаването с темата при тях може да се направи чрез решаване на конкретни задачи.

В 4$^{\text{-ти}}$ – 5$^{\text{-ти}}$ клас започва подготовката на учениците за обучение да доказват, но терминът доказателство не се употребява. При решаването на някои задачи за доказване се използва методът на "допускане на противното". Негова разновидност е "принципът на Дирихле". В много случаи прилагането му оказва положителен ефект за решаване на задачи, като дава просто и изящно решение.

Учениците трябва да се убедят в многообразието от възможности за прилагане принципа на Дирихле и някои негови обобщения при решаването на задачи и това да доведе до положителна мотивация за учене. С помощта на принципа на Дирихле се доказват твърдения за /не/съществуването на обекти притежаващи или не дадено свойство, но не се дава начин за намирането му. Това може да се счита за негов недостатък, но често е достатъчно да се установи съществуването на обект с дадено свойство, без да се търси обекта. Това са така наречените неконструктивни доказателства. Трудността при тези задачи понякога е да се съобрази кои са "чекмеджетата" и кои са "предметите".

С разглеждането на темата се цели не само да се разбере и запомни дадения материал, но на първо място усвояване на резултатите от търсенето и решаването на познавателни проблеми. Фактическият материал тук играе спомагателна роля за осъществяването на много по-сложни процеси и в резултат на това у учещите се формират качества за развитие на творческо мислене. Това спомага за разширяване и задълбочаване знанията на учениците по математика, повишаване на интереса към предмета и развиване на творческите им способности. Използването на новите знания стимулира учениците към самостоятелни занимания, възпитава у тях инициативност и стремеж към творчески изяви, постоянство и упоритост при изпълнение на поставените задачи .

През последните години на различни математически олимпиади и състезания се дават задачи, чието решаване значително се улеснява, ако се приложи принципа на Дирихле. Включването на занимателни елементи в условията на задачите създава стимул при по-малките за съсредоточаване на вниманието, внася лекота при усвояване на материала и създава положителна мотивация за работа. В по-горните класове постепенно се разширяват областите на приложение на принципа на Дирихле при доказване на твърдения и решаване на задачи от делимост, сравнения, някои приложения в геометрията и др.

На второ ниво се разглеждат задачи давани на различни математически състезания или подготвящи учениците за тях. Ако някои от задачите изискват определени математически знания е посочен препоръчителен клас и темата от задължителната програма, след която могат да разглеждат. На това равнище се затвърдяват и разширят получените от учениците знанията за приложенията на принципа на Дирихле. На практика при решаване на задачи се използват някои негови следствия и обобщения като:

1) *Ако в n чекмеджета има не повече от n - 1 предмета, то има празно чекмедже.*

2) *Ако в n чекмеджета се намират точно n предмета, то е вярно само едно от следващите твърдения:*

- *във всяко чекмедже има точно по един предмет;*
- *има празно чекмедже и чекмедже с поне два предмета.*

3) *Ако в n чекмеджета има поне n(k – 1) + 1 предмета, то има чекмедже с поне k предмета.*

4) *Ако в n чекмеджета има най-много n(k + 1) – 1 предмета, то съществува чекмедже с най-много k предмета.*

Необходимо е ученици за запознаят с възможността за прилагане на принципа на Дирихле и в случаи, когато различните възможности са равни на участниците например в турнир всеки срещу всеки. Ако има участник изиграл всички срещи, то няма такъв, който не е изиграл нито една и обратното.

Трудността при тези задачи понякога е да се съобрази кои са “чекмеджетата” и кои са “предметите”.

Трябва да се обърне внимание на учениците върху внимателното прилагане на принципа на Дирихле при решаване на задачи от геометрията, например за лица и покриване на фигури, защото формулировката и доказателството му се отнасят за крайни множества, а броят на точките от дадена фигура е безкраен. Сравняването на безкрайни величини в общия случай е по-задълбочена теория. Има обаче случаи за покриване на геометрични фигури, за които принципа на Дирихле е приложим.

Запознаването на учениците с темата може да се направи чрез решаването на задачата:

Задача 1. *Асен има в джоба си 7 монети от 1, 2, 5, 10, 20 и 50 стотинки. Има ли Асен 2 монети с една и съща стойност?*

Решение. Да допуснем, че Асен няма в джоба си 2 еднакви монети. Тогава той ще има от всеки вид най-много по една монета, т.е. ще има 6 монети, а по условие монетите са 7. Съгласно принципа на Дирихле в джоба на Асен ще има поне две монети с една и съща стойност. Добре е да се разискват въпроси като От каква стойност са еднаквите монети? Може ли всички монети да са от една и съща стойност?

Задача 2. *В едно училище има 410 ученици. Докажете, че поне двама от тях празнуват рождените си дни в един и същи ден.*

Задача 3. *В три клетки има 8 папагала. Има ли клетка с поне 3 папагала в нея? Можем ли да твърдим, че има клетка с точно 3 папагала?*

Задача 4. *В класна стая има 25 ученика. Покажете, че измежду тях има поне трима, които са родени през един и същи месец.*

Почти не се срещат обратните задачи подобни на разгледаните по-горе. Например:

Задача 7. /авторска/ *Няколко момчета установили, че имат общо 30 диска с игри. Тогава Иво уверено възкликнал: „Между нас има поне двама, които имат равен брой дискове.“ Какъв е най-големият възможен брой момчета, за да е вярно твърдението на Иво? Може ли да се посочи кои са момчетата с равен брой дискове и по колко диска имат ?*

Решение. Иво знае колко са момчетата в групата. Ако се предположи, че всеки двама имат различен брой дискове, то трябва сумата 0 + 1 + 2 + ... + n > 30. Непосредствено се проверява, че 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 < 30, а сумата 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 >30. Очевидно броят на момчета в групата е 8 или по-малък. На другите въпроси отговорът е отрицателен.

Задача 15*. *В един клас има 25 ученика. Известно е, че измежду всеки трима от тях двама са приятели. Покажете, че има ученик, който е приятел с поне 12 от останалите.*

Упътване. Ако ученикът А е приятел с k и не е приятел с останалите 24 – k, то всеки двама от тези 24 – k са приятели, защото в противен случай ще е нарушено условието от всеки трима, двама да са приятели. Ако k > 11, то А има поне 12 приятели. Нека $k \leq 10$. Тогава от останалите 24 – $k \geq 14$ всеки двама са приятели.

Особено полезно ще бъде за учениците, ако те сами съставят подобни задачи.

С принципа на Дирихле могат да се решават някои комбинаторни задачи.

При задачи както следващата е необходимо учениците да бъдат насочени към провеждане на последователни опити, с по-малък брой предмети и от тях да достигнат до изводите: Ако имаме ***m*** вида предмети и трябва да определим колко от тях най-малко да вземем /без да гледаме/ за да сме сигурни, че измежду извадените има ***k:***

– ***от един вид*** – отговорът е ***m*.(*k* – 1) + 1**;

– ***от даден вид*** – броят на всички останали видове и още ***k;***

– ***от всеки вид*** – ако има поне ***n*** на брой предмети от някой вид, то трябва да се вземат ***m* – *n* + *k*.**

Задача 30*. *В една кутия има 100 разноцветни топчета: 30 бели, 20 червени, 15 черни, 15 жълти, 10 сини и 10 зелени. Изваждаме, без да гледаме, 25 топчета. Ще има ли сред тях:*

а) поне 3 топчета от един и същи цвят?;   б) поне 2 бели топчета?;

в) поне по 1 топче от всеки цвят?

Отг. а) Да, защото трябва да извадим 6.2 + 1 = 13 топчета, за да сме сигурни, че поне 3 от тях са от един и същи цвят.

б) Не, защото трябва да извадим 20 + 15 + 15 + 10 + 10 + 2 = 72 топчета, за да има между тях поне 2 бели.

в) Не, защото трябва да извадим 30 + 20 + 15 + 15 + 10 + 1 = 91 топчета, за да сме сигурни, че има поне по едно от всеки цвят.

От приложенията на Дирихле в геометрията са разгледани задачи от припокриване, задачи от оцветяване, задачи от срязване и др.

При задачите, изискващи определени математически знания е препоръчан класа и темата от задължителната програма, след която могат да се разгледат.

Задача 34. *Коридор с дължина 12 метра е покрит с три килимени пътеки, всяка с дължина 6 метра, като няма място, където се припокриват трите едновременно. Покажете, че за някои две от тях е вярно: едната припокрива другата по дължина на разстояние поне 3 метра.*

Решение. Да номерираме пътеките от ляво на дясно. Да означим участъците, където първата пътека припокрива втората с S_1, а на втората и третата – с S_2. Очевидно S_1 + S_2.= 6, защото 3 пътеки с обща дължина 18 м, трябва да се поместят на коридор с дължина 12 м. Тогава или двете имат равни дължини (по 3 *м* всяко), или едното е с дължина *x* >3 *м*; а другото – 6 – *x* < 3 *м*.

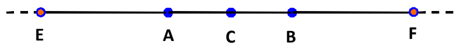
Фиг. 3.4.2

Задача 35. *Върху квадратен лист хартия със страна 20 см Ани е отбелязала 15 точки. Може ли брат ѝ да изреже от този лист кръг с диаметър 5 см и на него да няма нито една точка.*

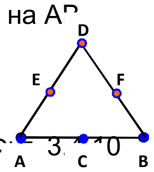
Решение. Разделяме квадрата на 16 еднакви квадратчета и понеже точките са 15, а квадратчетата 16, съгласно принципа на Дирихле ще има поне едно квадратче, на което няма нито една точка. От това квадратче със страна 5 см брат ѝ може да се изреже кръга.

Задача 54*. *Права е оцветена в два цвята. Докажете, че съществува отсечка, на която краищата и средата имат един и същи цвят.*

Упътване. Да предположим, че няма такъв интервал. Нека краищата на AB са сини. Върху правата AB разглеждаме точките E и F от двете страни на AB, такива че EA = AB = BF. Те няма да са сини. (*В противен случай краищата и средата на AF или* BE *ще са сини.*)Тогава средата на EF ще е синя, но тя е среда и на AB.



Фиг. 3.4.9



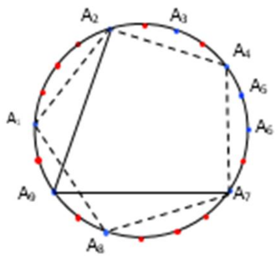
Фиг. 3.4.10

Задача 55. *Точките от равнина са оцветени в два цвята – син и червен. Покажете, че върху нея може да се намери равностранен триъгълник с еднакво оцветени върхове.*

Упътване. Нека *A, B* и *C* (Фиг. 3.4.11) са три сини точки и *C* е среда на *AB /такива съществуват съгласно задача 54/*. Ако *D, E* и *F* са върхове на равностранните триъгълници *ABD, ACE* и *BCF*, лежащи в една и съща полуравнина относно правата *AB*, то имаме точно една от двете възможности:

- поне една от точките *D, E* и *F* е синя и заедно с две от точките *A, B* и *C* образува равностранен триъгълник със сини върхове;
- всяка от точките *D, E* и *F* е червена и те са върхове на равностранен триъгълник.

Задача 39*. *На правилен 20-ъгълник са оцветени 11 върха. Покажете, че има равнобедрен триъгълник с върхове неоцветени точки.*



Фиг. 3.4.4

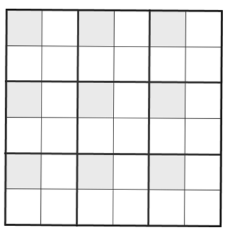
Упътване. Разделете върховете на 20-ъгълника на 4 групи, така че точките във всяка от тях да са върхове на правилен петоъгълник. Всеки три от върховете на правилен петоъгълник са върхове на равнобедрен триъгълник. Понеже неоцветените точки са 9, а групите са 4, то поне една от тях ще съдържа 3 неоцветени точки и те са върхове на равнобедрен триъгълник (Фиг. 3.4.4).

Задача 59. *В квадрат 6х6 какъв максимален брой клетки могат да бъдат оцветени, така че никои две оцветени да нямат обща точка?*

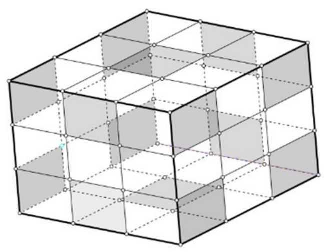
Отг. 9 *(Виж Фиг. 3.4.12.)*

Задача 60. *Стените на куб са квадрати 3х3. Какъв максимален брой клетки могат да бъдат оцветени, така че никои две оцветени да нямат обща точка?*

Отг. 14*. (Виж фиг. 3.4.13)*



Фиг. 3.4.12



Фиг. 3.4.13

За последните две задачи е подходящо да се насочат учениците към факта, че всеки квадрат 2х2 съдържа най-много една оцветена клетка.

Извод: Чрез принципа на Дирихле могат да се решават логически задачи давани на различни състезания, (аритметични, алгебрични, комбинаторни и геометрични), чието решение по други начини е по-сложно.

Принципът на Дирихле се явява мощно и понякога единствено средство за решаване на логически задачи, в които се изисква да се установи съществуването на някакъв обект с определени свойства.

Методически разработки на тема принцип на Дирихле са дадени в приложение 3.4.

3.5. Теория на числата и извънкласните форми на работа

Числата се използват не само за изчисляване, сравняване или измерване, но и за проектиране, рисуване, чрез тях се правят умозаключения и изводи.

Теория на числата (ТЧ) е най-фундаменталната формализация на понятието количество. Тя е най-естествената математическа теория е абстрактна, но тълкува естествени неща от математиката и живота.

Таблицата за умножение (*с която се запознават учениците от първи клас*) се явява една от формите на проявление на закономерностите управляващи живота и направляващи нашата умствена дейност. След като са изучили таблицата за умножение на учениците се предлага да запишат в редица последните цифри на произведенията на числата 0, 1, 2, ..., 9 със 7, т. е.

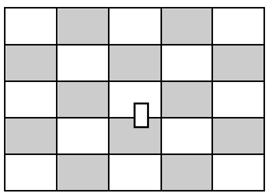
$$0,\ 7,\ 4,\ 1,\ 8,\ 5,\ 2,\ 9,\ 6,\ 3. \qquad (1)$$

и след това да образуват разликите на всеки две съседни числа (*от по-голямото число да извадят по-малкото*)[10]. Получава се редица от повтаряща се група числа 7, 3, 3, 7, 3, 3, 7, 3, 3. По този начин децата изпитват задоволство от получените резултати и у тях се пробужда жажда за изследване. По нататък продължавайки наблюдението си те могат да установят, че редицата (1) записана в обратен ред се получава от последните цифри на произведенията на числата 1, 2, 3, ..., 9, 0 с числото 3. Това ги поставя в ролята на малки "откриватели" и ги убеждава в необходимостта от овладяването на математическите преобразувания, възпитава у тях наблюдателност. А радостта от "малкото откритие" нерядко е трамплин за "по-сериозни" занимания с математиката и преодоляване на негативното отношение към нея; пробужда и поддържа интереса на учещите се към тази наука, развива творческите им способности.

При малките ученици много пъти търсенето на решенето се основава на метода "проба-грешка". Например когато се търсят решения на някои диофантови уравнения в 6 – 7 клас.

Решавайки задачи от една област на математиката често се използват методи от друга. Например, *нека на умалена шахматна дъска* 5 х 5 *има кон на централното поле* (*Фиг. 3.5.1*). *Той трябва да премине през всяко поле точно по веднъж.*

Великият математик Ойлер е отделял голямо внимание на подобни задачи.

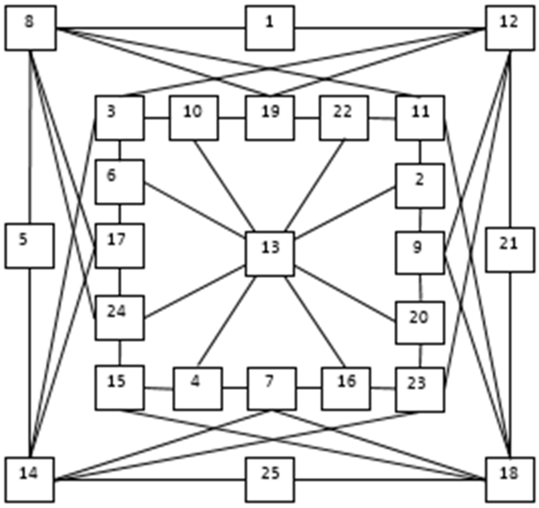


Фиг. 3.5.1.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Фиг. 3.5.2.

[10] Кордемский Б. А., Ахадов А. А.,Удивительный мир чисел, Просвещение, 1986



Фиг. 3.5.3.

Разбира се тук не би удовлетворило решение, което се основава на случайни опити за преместване на коня. Номерират се полетата на шахматната дъска както е показано на чертеж 2. За подбор на последователните действия на коня може да послужи някаква нагледна интерпретация на връзките между последователните му премествания. На дъската полетата 13 и 12 или 13 и 18 са съседни, но от гледна точка на преместванията на коня на 13 съседни са полето 2 и симетричното му 22, 4 и симетричното му 24, 10 и 6, 20 и 16. Следователно, ако се запази за полето 13 централно положение, то около него трябва да разположим полетата 2, 22, 4, 24, 10, 6, 20, 16. Ако след това между тези полета и вън от тях се разположат останалите 16 полета и се запази симетрията на шахматната дъска, то може да се получи мрежа подобна на тази от чертеж 3. От нея е очевидно съществуването на много маршрути за коня и лесно може да се избере някой от тях.

Интересно е наблюдението над делимостта на произведението на първите естествени числа и тяхната сума.

Ако $n = 3$, то 1.2.3 се дели на $1+2+3=6$ ($n+1=4$ – съставно.)

Ако $n = 4$, то 1.2.3.4 не се дели на $1+2+3+4=10$ ($n+1=5$ – просто.)

Ако $n = 5$, то 1.2.3.4.5 се дели на $1+2+3+4+5=15$ ($n+1=6$ – съставно.)

Ако $n = 6$, то 1.2.3.4.5.6 не се дели на $1+2+3+4+5+6=21$ ($n+1=7$ – просто) и т.н.

Това позволява да се направи хипотезата, че $n!$ не се дели на сумата $1+2+3+\ldots+n$, само ако $n+1$ е просто число. Трябва да се обърне внимание, че не е възможно да се провери за всички естествени числа, т. е непълната математическа индукция не е метод за доказване, но е подходяща при по-малките ученици. В горния курс обаче трябва да се проверява верността на хипотезата в общия случай. Доказателството на горната хипотеза може да се намери в .,Удивительный мир чисел“[11]

Делимостта на числата е източник и основа на много математически понятия и теореми. Още в първи клас учениците се запознават с делимостта в множеството на естествените числа и понятията делимо, делител и частно. Във втори клас се запознават с понятията четно и нечетно число, а в трети клас се разглежда деление с остатък. Една част от учениците не правят разлика между твърденията „*a* се дели на *c*" и „*a* е делител *c*". освен това не осъзнават еквивалентността на „*a* се дели на *c*", „*a* има делител *c*" и „*a* е кратно на *c*". Тези грешки се правят за съжаление не само от по-малките ученици, но и от ученици в по-горните класове. Причината е не само в недостатъчния брой часове предвидени за разглеждането на тези теми, но и липсата на подходящи задачи в учебните помагала за коригиране на грешки от този вид. Нещо повече, опитът показва, че учениците отговарят вярно на въпроса "кои от следващите твърдения са верни: A = {числото 60 се дели на 5}; B = {числото 13 се дели на 2}. На въпроса: "вярно ли е, че 60 се дели на 5 или 13 се дели на 2", масовият отговор е "не". Това показва, че пропуските в знанията на учениците са от математическата логика, а не от теория на числата. Трябва да се обърне внимание на правилното използване на логическите съюзи "*и*" и "*или*"в задачите.

[11] Кордемский Б. А., Ахадов А. А.,Удивительный мир чисел, Просвещение, 1986

За коригиране на тези пропуски са полезни дидактически игри (2 – 3 мин.) в учебния час, където учителят раздава картончета с написани на тях твърдения (*A*, *B*, *C*, …) като учениците трябва да свържат две или повече от тях с “*и*”, “*или*”, “*ако*”, “*то*”, „*тогава и само тогава* за да се получи ново вярно твърдение. Когато се допусне грешка, тя се коментира с класа. Такива 5-минутки могат да се ползват и за привличане на вниманието, когато повечето от учениците в класа са разсеяни почти по всяка тема.

В пети клас се въвеждат понятията прости и взаимно прости числа, делимост на произведение, общ делител и общо кратно на две и три числа, най-голям общ делител (НОД) и най-малко общо кратно (НОК) на две числа, а също така и признаците за делимост на 2 и 5, на 3 и на 9. (*Уроци 59 – 72, учебника на изд. „Просвета“, докато в Русия за същия материал са предвидени 48/ 42 учебни часа в зависимост от това колко часа през седмицата имат математика 6 или 5 часа.*)[12]. В следващите класове задачи от тази тематика почти не се срещат. Предвидените в задължителната програма часове са крайно недостатъчни и не позволяват трайно усвояване на учебното съдържание. В ЗИП по математика по указания от МОН се затвърдява учебният материал взет през седмицата. Единствено допълнително учебно съдържание може да се даде в часовете по СИП, но по финансови причини такива часове се разрешават (с малки изключения) единствено с цел осигуряване на норматив от учебна натовареност на учителя. Това налага допълнително разглеждане на елементи от теория на числата в различните форми на извънкласна работа с учениците.

Пропедевтика на понятието делимост в множеството на естествените числа се прави още в началното училище. При тях, а също така и в 5 – 6 клас трябва да се работи с учениците за разграничаване на твърденията: „*a* се дели на *c*” и „*a* е делител на *c*”, а също така и еквивалентността на „*a* се дели на *c*”, „*a* има делител *c*” и „*a* е кратно на *c*”.

Предложено е учебно съдържание и методика за решаване на задачи по темите „Делимост – деление с и без остатък, свойства“; „Прости и съставни числа“, „НОД и НОК“, „Признаци за делимост“, „Диофантови уравнения“, а в приложения 3.5 са дадени методически разработки по съответните теми. При някои задачи в скоби е отбелязано за кой клас са подходящи, но педагогът е този който избира задачите и методиката за решаването им. Ако някой задачи от ТЧ могат да се решат чрез използване на графи има съответните препратки.

За обосноваването принадлежността на дадено свойство от елементите на едно числово множество е достатъчно да покажем, че произволен елемент от това множество притежава това свойство. На базата на конкретни примери учениците трябва да достигнат до следните изводи:

1) остатъкът r при делението на числото a с числото b е неотрицателно число, по-малко от делителя, т.е. $0 \leq r < b$;

2) ако остатъкът е нула, делимото е кратно на делителя;

3) делимото може да се запише във вида $a = b \cdot q + r$, където $0 \leq r < b$.

Чрез конкретни задачи да се проследи как се изменя остатъкът при намаляване или увеличаване на делимото с 1, 2, и т. н.

Пример 10. *Една жена занесла на пазара кошница с лалета. Намерете най-малкия възможен брой цветя в кошницата, ако знаете, че когато жената ги изважда по две, в кошницата остава едно, ако ги изважда по три – остават 2, ако ги изважда по* 4 *– остават* 3 *и ако ги изважда по* 5 *– остават 4.*

Най-напред се обръща внимание на учениците, че при деление на търсеното число x на 2, 3, 4 и 5 съответните остатъци са 1, 2, 3 и 4 /винаги остатъкът е по-малък с 1 от делителя/. Ако се увеличи x с 1, то полученото число ще се дели точно на 2, 3, 4 и 5. Понеже най-малкото общо кратно на числата 2, 3, 4 и 5 е 60, то $x = 59$. /*Ако учениците не са запознати с понятието най-малко общо кратно, това понятие може да не се използва, а само да се посочи, че най-малкото число, което се дели на* 2, 3, 4 *и* 5 *е* 60/. При тази задача е уместно да се постави въпросът, може ли по този начин да се решават и други задачи, при които след прибавяне на някакво число към търсеното, полученото ще се дели на всяко от дадените.

Пример 11. *Да се намери най-голямото трицифрено число, което при деление на* 5 *има остатък* 2*, при деление на* 9 *има остатък* 6*, а при деление на* 11 *остатъкът е* 8.

Упътване. Увеличете търсеното число с 3 и полученото ще се дели точно на 5, 9 и 11.

Друг тип са задачи, при които остатъкът от делението е едно и също число.

Забележка 1*. При* тези задачи може да се търси число, което отговаря на някакви допълнителни условия, например най-голямото трицифрено /четирицифрено и т. н./ число, число по-малко от дадено число и др.

[12] Математика за 5кл., Просвета, 2009

Забележка 2*.* Всеки от тези примери може да се реши стандартно, като се използват системи сравнения от първа степен, но това може да стане при по-големите ученици.

При други от предложените задачи няма стандартен подход за решаването им. За тях са дадени съответните указания и връзки, ако има такива, с предходни задачи.

Може да се разгледа по-общ подход за решаване на задачи като следващата, при които се използва, че остатъкът не се променя, ако към делимото се прибави число, кратно на делителя.

Пример 13. *Да се намерят всички естествени числа, които при деление на* 3 *дават остатък* 1*, при деление на* 5 *дават остатък* 2*, а при деление на* 6 *– остатък* 4*.*

На базата на конкретен пример по индуктивен път да се установи, че числата $a = b.q + r$ и $a + k.b = b(q + k) + r$ имат един и същ остатък. Нека $a = 17$ и $b = 5$. Тогава

7 + 1.5 = 22 = 4.5 + 2; 17 + 2.5 = 27 = 5.5 + 2; 17 + 3.5 = 32 = 6.5 + 2 и т. н.

За решаването на задачите се прави следния анализ. Остатъците на търсените числа няма да се променят, ако се прибавят кратни на числата 3, 5 и 6. Понеже най-малкото общото кратно на числата 3, 5 и 6 е 30, за да се реши задачата, е достатъчно да се намери най-малкото естествено число с търсените свойства и към него да се прибавят 30, 60, 90 и т. н. Търсеното число е измежду числата 0, 1, 2,..., 29. (Най-малкото число се намира чрез непосредствена проверка). От тях при деление на 6 остатък 4 дават само числата 4, 10, 16, 22 и 28. От последните само 22 при деление на 5 дава остатък 2, а при деление на 3 – остатък 1. Търсените числа са 22, 22 + 30, 22 + 60, 22 + 90 и т. н. Общият вид на тези числа е $22 + k.30$.

Чрез решаваните задачи учениците се обучават да правят обобщения, да обосновават твърдения, като използват проверка за произволен елемент на разглежданото числово множество. В началото чрез беседа се установява как могат да се запишат две последователни числа, три последователни числа и т. н. и някои свойства, свързани с тях, като: сумата на три последователни числа се дели на 3; сумата и разликата на две числа от една и съща четност е четно число и др.

Задача 13. *Кралица позволява на всеки пленен в царството ѝ да го напусне, ако отгатне намислените от нея трицифрени числа A, B и C, като пленения посочва произволни числа X, Y, Z, а тя му съобщава сумата X.A+ Y.B+Z.C. Възможно ли е пленен да напусне кралството и кои са числата X, Y, Z?*

Отг. Да. *Например* $X = 1$, $Y = 1000$, $Z = 1000000$.

Задача 19* *С кое число трябва да разделим числата 40, 50 и 80, за да получим остатъци съответно 4, 2 и 8?*

Упътване. Търсеното число е делител на 36, 48 и 72. (Отг. 12).

Задача 1.20 Числото п(п + 2) завършва на цифрата 4. Посочете предпоследната цифра на това число.

Задача 27* *На черната дъска са написани числата от* 1 *до* 6*. На един ход се разрешава произволни две числа да се увеличат с* 1*. Възможно ли е след няколко хода всички числа да станат равни?*

Упътване. Не, защото сумата 1 + 2 + 3 + 4+ 5 + 6 е нечетно число и на всеки ход тя ще се увеличава с 2, т. е. винаги ще е нечетно число, а сумата на 6 равни числа е четно число.

Отг. Не.

Задача 39*. *Може ли числата от* 1 *до* 23 *да се разделят на няколко групи, така че във всяка група едно от числата да е равно на сумата от останалите числа в тази група?*

Отг. Не.

Предложеното учебно съдържание по темите свързани с НОД и НОК може да се разглежда с учениците след 5 клас. За пети клас е необходимо да са взети темите от задължителния курс, свързани с понятията прости и съставни числа, НОД, НОК и признаците за делимост на 2, на 3 и на 5. За някои от задачите, ще се посочва в скоби подходящите класове, в които могат да се разглеждат.

За 6 – 8 клас алгоритъмът на Евклид и някои от свойствата могат да се илюстрират с примери, а строгите им доказателства са подходящи за разглеждане след 9 клас на второ ниво. Посочено е къде могат са се намерят доказателствата допълнителни задачи по темите.

Алгоритмът на Евклид е много прост и ефективен метод за намиране на НОД на две числа.

В задължителния курс по математика в училище НОД и НОК на две числа се намира като последните се разлагат на произведение от прости множители и за НОД всеки множител (който се среща във всяко от числата) се взема от най-ниската степен, от която се среща, а за НОК – най-голямата степен, от която се среща поне в едно от числата. Този начин не е удобен за намиране на НОД и НОК на големи числа. За такива е удобно използването на алгоритъма на Евклид.

Алгоритъм на Евклид (*с изваждане*).

Нека са дадени две числа. По-голямото от тях заменяме с разликата им. Този процес се повтаря до получаването на само едно ненулево число.

*Например***:** НОД(480, 180) = НОД(300, 180) = НОД(120, 180) = НОД (120, 60) = НОД(60, 60) = НОД(60, 0) = 60.

Алгоритъм на Евклид (*с деление*).

Нека са дадени две числа. По-голямото от тях разделяме на по-малкото. Получаваме частно и остатък. Делим делимото на остатъка и т. н. докато получим остатък 0. Последният различен от нула остатък е НОД на дадените числа.

*Например***:** дадени са числата 480 и 180.

480 **:** 180 = 2 (ост. 120); 180 **:** 120 = 1 (ост. 60); 120 **:** 60 = 2 (ост. 0); НОД(480, 120) = 60.

Последното може да се използва за намиране на числа u и v, такива че $d = a.u + b.v$, където d = НОД(a, b).

<u>*Забележка* 3</u>. Алгоритмът на Евклид може да се използва за намиране на НОК на две числа, като се използва 1), а именно

$НОК(a, b) = \frac{ab}{d}$, където d **=** *НОД* (a, b).

Задача 1.7 *Разликата на две нечетни числа е* 8*. Намерете* НОД *на тези числа.*

Упътване. Използвайте, че НОД дели 8, т. е. НОД е сред числата 1, 2, 4 и 8.

Отг. 1.

Задача 1.8 *Намерете поне две естествени числа, които имат общ делител* 18 *и сума им е* 198*.*

Упътване. Тъй като всяко от числата се дели на 18, то можем да ги представим във вида 18a и 18b. Следователно 18a + 18b = 198 и a + b = 11, т. е. едното число може да приеме стойности 6, 7, 8, 9 или 10, а другото съответно – 5, 4, 3, 2 или 1. Двойките числа, които удовлетворяват условието на задачата са 108 и 90, 126 и 72, 144 и 54, 162 и 36, 180 и 18.

Задача 1.9 *Каква най-голяма стойност може да има НОД на* 29 *естествени числа, чиято сума е равна на* 3000*?*

Упътване. НОД на няколко числа е най-голям когато те са равни. Понеже 3000 не се дели на 29 точно, то ако 28 от числата са равни на 100, а едно от тях е равно на 200 – най-големият им общ делител е равен на 100.

Задача 1.12 *Намерете две естествени числа, които имат най-малко общо кратно* 504, *а сумата им е: а*) 119; *б*) 182; *в**) 156; *г**) 112.

Решение. *а*) Понеже сумата е нечетно число, то едното от числата е четно, а другото – нечетно. НОК 504 = $2^3.3^2.7$ и поне едното от тях се дели на 2^3. Тъй като само едното число е четно, то се дели на 8. Сумата на числата не се дели на 3 (следователно и на 9). Това означава, че само едно от числата се дели на 3^2. Понеже сумата на двете числа се дели на 7 и поне едното от тях се дели на 7, то и другото число се дели на 7. Търсените числа са измежду числата 7, 56 = 8.7, 63 = 9.7 и 504 = 8.9.7**.** Само на 56 и 63 сумата е 119.

Задача 1.13 *Намерете две естествени числа, които имат най-малко общо кратно* 660, *не се делят едно на друго и най-големият им общ делител е равен на* 12*.*

Решение. НОК = 660 = 2^2.3.5.11 и 660:12 = 55 = 5.11. Тъй като нито едно от числата не се дели на другото, то тези числа могат да бъдат само числата 60 = 12.5 и 132 = 12.11.

Задача 1.36 *Може ли с помощта само на линийка и пергел да се раздели ъгъл от* 19° на 19 равни части.

Отг. 19.19° – 360° = 1°.

Признаци за делимост

Целта е да се затвърдят знанията на учениците за признаците за делимост на 2, на 3 и на 5, а също така да се разширят знанията на учениците за нови такива като се запознаят с признаците за делимост на 4, на 8, на 9, на 25, на 125; да се формират умения у тях за прилагането на новите знания при решаването на конкретни задачи. За реализирането на поставените цели е необходимо учениците:

1*) *Едно число N се дели на* 9*, ако сумата от цифрите му се дели на 9;*

2*) *Едно число N се дели на* 4 (*или 25*)*, ако числото образувано от последните му две цифри се дели на* 4 (*или* 25);

3*) *Едно число N се дели на* 8 (*или* 125), *ако числото образувано от последните му три цифри се дели на* 8 (*или* 125);

4*) *Числото N се дели на* 11, *ако разликата на сумата от цифрите му стоящи на нечетно място и сумата от цифрите стоящи на четно място се дели на* 11;

5*) *Едно число N се дели на* 2^m (*или на* 5^m), *ако числото образувано от последните му m цифри се дели на* 2^m (*или на* 5^m);

6*) *Числото N се дели на* 13, *ако* 13 *дели сумата на числото получено от N след зачертаване на последната му цифра и учетвореното ѝ произведение.*

7*) *Числото N се дели на* 23, *ако* 23 *дели сумата на числото получено от N след зачертаване на последната му цифра и произведението ѝ със 7.*

8*) *Едно число се дели на* 37, *ако сумата на числата образувани от тройките последователни цифри на даденото се дели на* 37 (*разделянето на тройки се извършва от дясно на ляво, като последната група може да съдържа* 2 *или една цифри*)

9*) *Едно число N се дели на 7 (11 или 13), ако се дели на 7 (11 или 13) числото получено по следният начин:*

- *Разделяме на групи от три цифри десетичния запис на N от дясно на ляво като последната група може да съдържа* 2 *или една цифри;*
- *Пред така получените числа поставяме знак плюс, ако стоят на нечетно място и знак минус, ако са четно. Пресмятаме стойността M на този израз.*
- *Ако M се дели на 7 (11 или 13), то и N се дели на 7 (11 или 13).*

Предложен е начин за доказване на признаците за делимост на 8 и 125; 9; 11; 13; 23; 7, 11 и 13; 37 и са дадени примери.

Общ алгоритъм за намиране на признак за делимост на просто число p.

Нека $N=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$ е естествено число и да означим с N_1, числото получено от *N* след зачертаване на цифрата на единиците му a_0, т.е. $N_1=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1}$.

Търсим константа *k*, такава че ако числото $B=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1}+ka_0=N_1+ka_0$ се дели на *p,* то и *N* да се дели на *p* т. е. след зачертаване на последната цифра в N и прибавянето към полученото число на последната му цифра умножена с константата k да се получи число, което също се дели на p.

Твърдение: *Естественото числото N се дели на простото число p, тогава и само тогава, когато числото* $B=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1}+ka_0$ *се дели на p. Константата k съществува и зависи от p.*

Първо ще докажем съществуването на константата.

Разглеждаме числото $10B-N$. Очевидно, ако *B* и *N* се делят на *p,* то и $10B-N$ ще се дели на *p*. Преобразуваме израза $10B-N$

$$10B-N=10(N_1+ka_0)-(10N_1+a_0)=(10k-1)a_0.$$

Трябва *k* да е такова число, за което p дели $10k-1$. Понеже сравнението

$$10k-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)\,,\quad p>5$$

има единствено решение от вида $k\equiv -(-1)10^{\varphi(p)-1}(\mathrm{mod}\,p)$, т.е. $k\equiv 10^{p-2}(\mathrm{mod}\,p)$, където $\varphi(n)$ е функцията на Ойлер и при $n=p$ просто число $\varphi(p)=p-1$. [13]

Забележка 1: Ограничението *p* > 5 не е от съществено значение, защото признаци за делимост на 2 и 5 са известни, но това условие ни гарантира, че *p* и 10 са взаимно прости числа.

Съществуването на решение на сравнението $10k-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ се гарантира от ***Теоремата:*** *Нека е дадено сравнението* $ax+b\equiv(\mathrm{mod}\,m)$ *и* $(a,m)=d$. *Тогава:*

а) ако $d=1$ *то сравнението има точно едно решение* $x\equiv -ba^{\varphi(n)-1}$;

б) $d>1$ *и* d *не дели* b, *то сравнението няма решение;*

в) ако $d>1$ *и d дели,b то сравнението има точно* d *решения* $x_k=x_0+n\dfrac{m}{d}$, *за* $m=0,1,\,\dots,\,d-1$, *където* x_0 *е произволно решение на сравнението..*

[13] Изказвам своята благодарност на проф. Ив. Тонов за идеята на доказателството за съществуване на константата чрез теорията за числови сравнения

Забележка 2: Ако числото x_0 е решение на сравнението $ax+b\equiv(\mathrm{mod}\,m)$, то всички числа $x\equiv x_0(\mathrm{mod}\,m)$ ще считаме за едно и също решение на сравнението.

Следователно константата k съществува. Нещо повече, тя не е единствена. Ако по някакъв начин е намерено число k_0, за което числото *B* се дели на *p*, то и всяко друго число сравнимо с k_0 по модул *p* ще удовлетворява условието *B* да се дели на *p*.

Нека *B* се дели на *p*. Тогава и числото $10B-N$ също ще се дели на *p*(съгласно изложеното по-горе). Ето защо и $N=10B-(10B-N)$ ще се дели на *p*.

Например, в следващата таблица са дадени константите (най-голямата отрицателна и най-малката положителна) за няколко прости числа

1	*N* се дели на 7, ако $\begin{cases} B=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\dots a_1}+5a_0 \\ B=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\dots a_1}-2a_0 \end{cases}$ се дели на 7	k = 5 или k = - 2
2	*N* се дели на 13, ако $\begin{cases} B=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\dots a_1}+4a_0 \\ B=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\dots a_1}-9a_0 \end{cases}$ се дели на 13	k = 4 или k = - 9
3	*N* се дели на 17, ако $\begin{cases} B=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\dots a_1}+12a_0 \\ B=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\dots a_1}-5a_0 \end{cases}$ се дели на 17	k = 12 или k = - 5
4	*N* се дели на 19, ако $\begin{cases} B=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\dots a_1}+2a_0 \\ B=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\dots a_1}-17a_0 \end{cases}$ се дели на 19	k = 2 или k = - 17
5	*N* се дели на 23, ако $\begin{cases} B=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\dots a_1}+7a_0 \\ B=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\dots a_1}-16a_0 \end{cases}$ се дели на 23	k = 7 или k = - 16

Забележка. Съществуването на константата *k* може да се докаже и с принципа на Дирихле, но този начин не гарантира единствеността.

Идея за намиране на константата *k.*

Ще покажем как да се намери константа, например за $p=17$.

Понеже първите естествените числата, които се делят на 17 са 17, 34, 51, 68, 85, то признакът за делимост на 17 трябва да е в сила и за тях, т.е. търсим цяло число k, такова че и всяко от числата $1+k.7$, $3+k.4$, $5+k.1$, $6+k.8$ и т.н. да се дели на 17.

(17 $\rightarrow$ $1+k.7$ - *отделяме последната цифра* 7, *към полученото число* 1 *прибавяме произведението на* $k.7$ *и получената сума* $1+k.7$ *трябва да се дели на* 17)

По метода на изчерпването чрез проверка намираме, че $k=12$.

В следващата таблица са дадени съответните пресмятания.

$1+k.7$		$3+k.4$	
$1+1.7=8$, $1+2.7=14$, $1+3.7=22$, $\dots$, $1+12.7=85=17.5$ $\Rightarrow k=12$	$1-1.7=-6$ $1-2.7=-13$, $1-3.7=-20$, $1-4.7=-27$, $1-5.7=-34=-2.17$ $\Rightarrow k=-5$	$3+1.4=7$, $3+2.4=11$, $3+3.4=25$, $\dots$, $3+12.4=51=3.17$ $\Rightarrow k=12$	$1-1.7=-6$ $1-2.7=-13$, $1-3.7=-20$, $1-4.7=-27$, $1-5.7=-34=-2.17$ $\Rightarrow k=-5$
$5+k.1$		$6+k.8$	

$5+1.1=6,$ $5+2.1=7,$ $5+3.1=8,$ .... $5+12.1=17$ $\Rightarrow k=12$	$5-1.1=4,$ $5-2.1=3,$ $5-3.1=2,$ $5-4.1=1,$ $5-5.1=0$ $\Rightarrow k=12$	$6+1.8=14,$ $6+2.8=22,$ $6+3.8=30,$ .... $6+12.8=102=6.17$ $\Rightarrow k=12$	$6-1.8=-2,$ $6-2.8=-10,$ $6-3.8=-18,$ $6-4.8=-26,$ $6-5.8=-34$ $\Rightarrow k=-5$

По метода на изчерпването винаги може да се намери такова число. Но за големи прости числа това е трудоемко.

Забелязва се, ако числото $sp=\overline{b_m b_{m-1}\dots b_1 1}$ има цифра на единиците равна на 1, то числото $\overline{b_m b_{m-1}\dots b_1}+k.1$ ще се дели на p.

Данните показват, че ако намерим число, кратно на p и с последна цифра 1, то можем да си спестим част от проверките и сравнително бързо да намерим най-малката положителна стойност за k. Ще покажем най-напред за числата 19, 23, 37, 181 и 599

$$p=19\to 19.9=171\to 17+k.1\to 17+k=19\Rightarrow k=2 \quad или \quad k=-17;$$
$$p=23\to 23.7=161\to 16+k.1\to 16+k=23\Rightarrow k=7 \quad или \quad k=-16;$$
$$p=37\to 37.3=111\to 11+k.1\to 11+k=37\Rightarrow k=26 \quad или \quad k=-11;$$
$$p=181\to 18+k.1\to 18+k.1=181\Rightarrow k=163 \quad или \quad k=-18;$$
$$p=599\to 599.9=5391\to 539+k.1\to 539+k=599\Rightarrow k=60 \; или \; k=-539.$$

Това винаги е възможно, защото простите числа по-големи от 5 имат последна цифра 1, 3, 7 или 9. Ако p има последна цифра различна от 1, т.е. 3, 7 или 9, след умножаване съответно с 7, 3 или 9 се получава число кратно на p, с последна цифра 1 и за него се прилага изложеният по-горе алгоритъм.

На по-малките ученици (не познаващи числовите сравнения и теорията свързана с тях) може да се предложи за всяка конкретна стойност на простото число p и съответната му константа k да докажат, че числото $N+(p-10)B$ се дели на p.

Доказателствата са лесни, основават се на свойствата на делимостта и са по възможностите на учениците от 5 – 7 клас.

Например, при $p=23$ и $k=7$ или $k=-16$ последователно намираме

$$N+13B=\begin{cases}10N_1+a_0+13(N_1+7a_0)=23(N_1+a_0)=23(N_1+4a_0)\\ 10N_1+a_0+13(N_1-16a_0)=23(N_1+a_0)=23(N_1-9a_0)\end{cases}.$$

Понеже всяко от числата $N+13B$ и $13B$ се дели на 23, то и разликата им N ще се дели на 23.

Да се провери числата 23501478 и 2349865 делят ли се на 13.

За числото 23501478 последователно получаваме

23501478 $\to$ 2350147 + 4.8 = 2350179 $\to$ 235017 + 4.9 = 235053 $\to$

$\to$ 23505+ 4.3 = 23 517 $\to$ 2351+4.7 = 2379 $\to$ 237+ 4.9 = 273 $\to$ 27+ 4.9 = 39 $\to$

Тъй като 39 се дели на 13, то и 273 се дели на 13 и т.н., връщайки се по обратен ред получаваме, че и даденото число се дели на 13.

Аналогично и за 2349865

2349865 $\to$ 234986 + 4.5 = 235006 $\to$ 23500 + 4.6 = 23524 $\to$

$\to$ 2352+ 4.4 = 2368 $\to$ 236 + 4.8 = 268 $\to$ 26 + 4.8 = 58 $\to$ 5 + 4.8 = 37

От 37 се не се дели на13, следва че и числото 2349865 не се дели на 13.

Изложеното по-горе позволява много бързо да се получи признак за делимост на произволно просто число и то без да се използва калкулатор или справочна литература. Това би улеснило решаването на различни задачи от делимост.

3.5.4 Диофантови уравнения. Те не се изучават в задължителната програма. Такива задачи обаче се срещат на състезания дори за ученици и в началното училище. Задачите се решават по метода проба-грешка или изчерпване на възможностите. Решаването на повече и разнообразни задачи е гаранция за успешно справяне с нови такива. За тези задачи с пълна сила важи мисълта на Пойа: "***Ако искате да се научите да решавате задачи, то***

решавайте ги“. Предложеното учебно съдържание може да се разглежда с учениците от 6, 7, 8, 9 клас. След всяка задача е дадено за кой клас е подходяща, например /7, 8, 9/ означава, че задачата е подходяща за 7, 8 и 9 клас. До 8 клас е подходящо да решават някои видове диофантови уравнения – предимно линейни диофантови уравнения с две и три неизвестни като се използват свойствата на делимостта или методът на пълното изчерпване. Системен курс по ДУ може да започне най-рано 8 или по-горен клас. По темата са предложени са разнообразни по съдържание и начин на решение задачи (с решения подходящи за възрастта), а педагога има възможност да избере както задачите, с които да илюстрира методите за решаване на диофантови уравнения, така методите, в зависимост от индивидуалните възможности на обучаваните.

Задача 3.23. */* 6,7,8/ *Камелия има ленти за панделки всяка с дължина 63 cm, а приятелката ѝ Валя – с дължина 98 cm. Може ли без да разрязва лента Валя да даде на Камелия 11 cm панделка? По колко панделки най-малко трябва да има всяко от момичетата, за да е възможно Валя да даде на Камелия 21 cm панделка?*

Отг. Не, защото в уравнението 98 x – 63 y = 11 лявата страна се дели на 7, а дясната не. Да. Валя трябва да има поне 15 ленти, които да даде на Камелия, а Камелия на нея – 23.

Задача 3.24*./ 6,7,8/ *Във всички клетки на таблица* 20×20 *е поставен знак „+“. Разрешава се да се променят едновременно всички знаци от даден ред или стълб. Може ли прилагайки това правило в 199 да има знак „–“*?

Решение. Двукратното прилагане на тази операция над един ред/съответно стълб/ не променя вида на знака във всяка клетка от реда /стълба/. Ето защо можем да считаме, че операцията е приложена над k различни реда и s различни стълба. След това броят на клетките със знак „– „ е $(k + s).20 – ks$. Понеже този брой трябва да е 199, получаваме уравнението $(k + s).20 – ks = 199$. След преобразуването му имаме $(20 – k)(20 – s) = 201$. Понеже 201 = 3.67, то последното уравнение няма за решение цели числа k и s от множеството 0, 1, 2, 3, ..., 20.

Задача 3.27. */* 6,7,8/ *Двама палавници Иво и Васко късали през междучасието един вестник на парчета. При това Иво всяко парче разкъсвал на 5 части, а Васко – на 9. Преди да започне часът те решили да съберат парчетата. Оказало се, че броят на парчетата е 2006. Всички парчета ли са събрали двамата?*

Решение. Ако Иво е разкъсал m парчета, той е прибавил $4m$ късчета. Аналогично, ако Васко е разкъсал n парчета, то той е прибавил $8n$ късчета. Тогава общият брой на парчетата е $1 + 4m + 8n = 2006$. Лявата страна на последното уравнение е нечетно число, а дясната – четно и следователно няма решение в естествени числа.

Задача 3.28. */7,8/ В един клас учат повече от 40 и по-малко от 50 ученика. На контролно по математика една четиринайсета от учениците получили шестици, две седми – петици, една трета – четворки, една шеста – тройки и останалите – двойки. Колко ученици са получили оценка 2?*

Упътване. Използвайте, че броят на учениците е число което се дели на 14, 6, 7, 3 и е число по-малко от 50. НОК(3, 7, 6, 14) = 42 и следователно това е броят на учениците. Пресметнете общия брой на учениците получили оценка различна от 2.

Отг. 6 ученика са получили оценка 2.

Задача 31. */5,6 клас/ Ива на* 16 *февруари* 2003 *г. казала: ”Разликата от числата на месеците през, които съм живяла и навършените от мен години днес за първи път стана равна на* 111*. Кога съм родена?*

Решение. Нека Ева е навършила M години и P месеца. Разликата, за която тя говори е $(P + 12.M) – M = P + 11M = 111$. Тъй като P е по-малко от 12, то единственото решение е M= 10 и P =1. следователно Ива е навършила на 16 февруари 2003 г. 10 години и 1 месец и е родена на 15. I. 1993г.

Задача 3.34 */*6,7,8,9 клас/ *Съществуват ли естествени числа x, y и z, които са решение на уравнението* $28x + 30y + 31z = 365$?

Решение. Годината има 12 месеца: 1 месец с 28 дни (февруари-с изключение на високосните години), 4 месеца по с по 30 дни (април, юни, септември и ноември) и останалите 7 месеца имат по 31 дни или

$1.28 + 4.30 + 7.31 = 365.$

Задачата има и друго решение $x = 2$, $y = 1$ *и* $z = 9$.

Задача 3.38. */7,8/ Покажете, че не съществуват цели числа x, y, z, t, които удовлетворяват всяко от следващите равенствата:*

$$xyzt - x = 5681, \quad xyzt - y = 681, \quad xyzt - z = 81, \quad xyzt - t = 1.$$

Решение. Нечетните числа 5681, 681, 81, 1 се делят съответно на *x, y, z, t*. Ето защо тези числа са нечетни и числото *xyzt* е нечетно. Следователно левите страни на равенствата са четни числа, а десните – нечетни. Получи се противоречие, което показва, че такива числа не съществуват.

Задача 3.39*. */7,8,9/ Имаме 20 мониста от 10 цвята (по две от всеки цвят). Те са разпределени в 10 кутийки по някакъв начин. Известно е, че може да се избере по едно монисто от всяка кутийка, така че от всички цветове да има по едно. Докажете, че броят на начините, по които може да се направи такъв избор е ненулева степен на числото 2.*

Задача 3.40*. */7,8,9 клас/ В обръщение има монети от 1, 2, 5, 10, 20, 50 стотинки и 1 лев. Ако с k монети може да се плати сума от s стотинки докажете, че с s монети може да се плати сума от k лева.*

Упътване. Използвайте, че за всяка монета на стойност *n* има монета и на стойност 100/*n*.

Задача 48*. */6,7,8/ Студент за 5 години е взел 31 изпита, като всяка година е полагал по-голям брой изпити от предходната. Намерете колко изпита е издържал студентът в IV курс, ако знаете, че в V курс е положил три пъти повече изпити отколкото в I курс.*

***Упътване*:** Определете най-напред броя на взетите изпити в I и V курс (3 и 9). Тогава остават два варианта за взетите изпити в II, III и IV курс – $(4+7+8)$ и $(5+6+8)$.

Задача 3.48*. */8,9,10/ Куб разрязали на 99 еднакви кубчета, от които точно едно има основен ръб различен от 1, а всеки от останалите има ръбове равни на 1. Намерете обема на изходния куб.*

Решение. Нека изходният куб има дължина на основния ръб *x* единици, а с *y* да означим основния ръб на куба, чиято дължината е различна от 1. Тогава $x^3 - y^3 = 98$, където *x* и *y* са естествени числа по-големи от 1 и x > 1. Понеже $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$, $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 98$ и $98 = 1.2.7.7$, то имаме следните случаи:

1) $\left| \begin{array}{l} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2=98 \end{array} \right.$; 2) $\left| \begin{array}{l} x-y=2 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{array} \right.$ и 3) $\left| \begin{array}{l} x-y=7 \\ x^2+xy+y^2=17 \end{array} \right.$.

От условието $x > y > 1$ лесно се проверява, че единствено във втория случай имаме решение $x = 5$, $y = 3$ и обемът на изходният куб е 125 куб. единици.

уОтг. 125.

Забележка. Задачата може да се реши и без използването на системи, а чрез изчерпване на всички възможности.

3.5 Симетричните полиноми

В задължителната учебна програма няма възможност за изучаването на симетричните полиноми на две и три променливи, поради ограниченият брой часове. Това може да стане обаче в извънкласните форми на работа.

Предложени са методически разработки на темите:

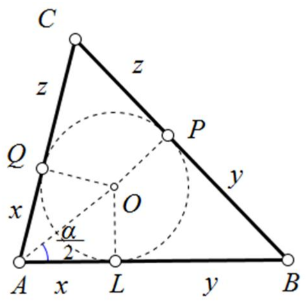
1. Симетрични полиноми три променливи, формулите на Нютон и някои техни свойства и приложения за доказване на тъждества и неравенства.(Базово и второ ниво)

Към тази тема е предложено подходящо за учениците доказателство на основната теорема за симетрични полиноми.

2. Приложение на симетричните полиноми на три променливи за доказване на тъждества и неравенства свързани със страните на триъгълника.

При доказване на тъждества и неравенства свързани с геометрични фигури често се налага съчетаване на алгебрични, тригонометрични и геометрични методи. Ще разгледаме един сравнително прост метод за получаване на голям брой тъждества и неравенства между елементите на триъгълника. Той се състои в съставяне на кубично уравнение, чиито корени са едни или други елементи на триъгълника [10]. След това с помощта на формулите на Виет се получават симетрични изрази за елементите на триъгълника изразени чрез полупериметъра, радиусът на вписаната и радиусът на описаната окръжност, а от тях се получават голям брой тъждества и неравенства.

Методът за построяване на кубични уравнения, чиито корени са елементи на триъгълника е достатъчно прост. Ще разгледаме как това може да стане за страните на триъгълника a, b и c и $\angle OAL = \frac{\alpha}{2}$.[14]



Нека $k(O, r)$ е окръжност вписана в $\triangle ABC$ и $AQ = AL = x$, $BL = BP = y$ и $CP = CQ = z$. Очевидно $x + y + z = p$ и $y + z = a$. Оттук намираме $x = p - a$. От синусовата теорема следва, че $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ и тогава $a = 2R\sin\alpha = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ и

(1) $$a = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

От правоъгълния $\triangle ALC$ се получава равенството

(2) $$p - a = r\,cotg\,\frac{\alpha}{2}\cdot$$

Тъй като от (1) и (2) се намира $\frac{p}{p-a} = \frac{4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{r\cot g\frac{\alpha}{2}} = \frac{4R}{r}\sin^2\frac{\alpha}{2}$ и

$a(p-a) = 4Rr\cos^2\frac{\alpha}{2}$ откъдето следва

(3) $$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{ar}{4R(p-a)} \quad \text{и} \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a(p-a)}{4Rr}\cdot \quad .$$

След заместваме на $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ и $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ от (3) в равенството $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$ получаваме $\frac{ar}{4R(p-a)} = \frac{a(p-a)}{4Rr} \Leftrightarrow$

(4) $$a^3 - 2pa^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)a - 4Rrp = 0. \quad .$$

Последното равенство можем да запише и за страните b и c.

(5) $$\begin{array}{l} b^3 - 2pb^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)b - 4Rrp = 0 \\ c^3 - 2pc^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)c - 4Rrp = 0 \end{array}.$$

Тези равенства могат да се разглеждат като уравнения от трета степен относно a, b и c. Тъй като коефициентите пред равните степени са едни и същи, то можем да твърдим, че страните a, b и c на произволен триъгълник са корени на уравнението

(6) $$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$$

От формулите на Виет за тях са верни равенствата

(7) $$\begin{array}{l} \sigma_1 = a + b + c = 2p \\ \sigma_2 = ab + ac + bc = p^2 + r^2 + 4Rr, \\ \sigma_3 = abc = 4Rrp. \end{array}$$

Прилагайки (7) и като се използват известни тъждества и неравенства за симетрични полиноми на три променливи могат да се получат такива за страните на триъгълника. Например

1) $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$.

Доказателство. $a^2 + b^2 + c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$.

2) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{(p^2 + r^2 - 4Rr)^2 - 16Rr^3}{(4Rrp)^2}$;

Доказателство.

[14] Кацарска М., Изучаване на симетричните полиноми в задължително избираемата подготовка (ЗИП) по математика в 9-ти клас. Proceedings of Thirtieth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians Borovets, April 8 - 11, 2001, стр. 361 – 365

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{(4Rrp)^2}=\frac{\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3^2}=\frac{(p^2+r^2-4Rr)^2-16Rr^3}{(4Rrp)^2}\cdot$$

3) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 36Rrp$;

Доказателство. От

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 9abc \Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)\geq 36Rrp\,.$$

След заместване на (7) в последното неравенство получаваме

$$2p\left[4p^2-2(p^2+r^2+4Rr)\right]\geq 36Rrp \Leftrightarrow p^2-r^2\geq 22Rr.$$

От $a=\dfrac{2S}{h_a}$ след заместване в (5) намираме $\dfrac{8S^3}{h_a^3}-2p\dfrac{4S^2}{h_a^2}+(p^2+r^2+4Rr)\dfrac{2S}{h_a}-4Rrp=0$

След умножаване двете страни на последното равенство с h_a^3 се получава

(8) $$4Rrph_a^3-2S(p^2+r^2+4Rr)h_a^2+8p^2S^2-8S^3=0.$$

Но $S=pr$ и след разделяне на двете страни на (8) с pr се получава

(9) $$4Rh_a^3-2(p^2+r^2+4Rr)h_a^2+8p^2rh_a-8p^2r^2=0.$$

Аналогични равенства се получават и за височините h_b и h_c:

(10) $$\begin{array}{l}4Rh_b^3-2(p^2+r^2+4Rr)h_b^2+8p^2rh_b-8p^2r^2=0\\ 4Rh_c^3-2(p^2+r^2+4Rr)h_c^2+8p^2rh_c-8p^2r^2=0\end{array}.$$

От (9) и (10) се вижда, че височините h_a, h_b и h_c на $\triangle ABC$ са корени на уравнението

(11) $$4Ry^3-2(p^2+r^2+4Rr)y^2+8p^2ry-8p^2r^2=0\,.$$

Формулите на Виет за (11) приемат вида

(12) $$\begin{aligned}\sigma_1&=h_a+h_b+h_c=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R},\\ \sigma_2&=h_ah_b+h_ah_c+h_bh_c=\frac{2p^2r}{R},\\ \sigma_3&=h_ah_bh_c=\frac{2p^2r^2}{R}\cdot\end{aligned}$$

От синусовата теорема $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R\Rightarrow a=2R\sin\alpha$. След заместване на a с $2R\sin\alpha$ в уравнението (4), то приема вида $8R^3\sin^3\alpha-4R^2p\sin^2\alpha+(p^2+r^2+4Rr)sin\alpha-2rp=0$. Ако се разделят двете страни на последното уравнение с $2R$ се получава

(13) $$4R^2\sin^3\alpha-4Rp\sin^2\alpha+(p^2+r^2+4Rr)sin\alpha-2rp=0,$$

Аналогични уравнения можем да намерят за $sin\beta$ и $sin\gamma$, т.е.

$$4R^2\sin^3\beta-4Rp\sin^2\beta+(p^2+r^2+4Rr)sin\beta-2rp=0,$$

$$4R^2\sin^3\gamma-4Rp\sin^2\gamma+(p^2+r^2+4Rr)sin\gamma-2rp=0.$$

Очевидно $sin\alpha, sin\beta$ и $sin\gamma$ са корени на уравнението

(14) $$4R^2z^3-4Rpz^2+(p^2+r^2+4Rr)z-2rp=0\,.$$

Прилагаме формулите на Виет за (14) и получаваме

(15) $$\begin{aligned}\sigma_1&=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{p}{r},\\ \sigma_2&=\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\gamma=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R},\\ \sigma_3&=\sin\alpha\sin\beta h_c=\frac{pr}{2R^2}\cdot\end{aligned}$$

Прилагайки зависимостите (15) могат да се докажат различни тъждества. Например от $\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\beta}+\dfrac{1}{\sin\gamma}\right)(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\geq 9$ следва $p^2+4Rr\geq 8r^2$. $p^2+4Rr\geq 8r^2$.

При доказване на тъждества и неравенства свързани с геометрични фигури често се налага съчетаване на методи, които приложени за една задача не могат да се използват при друга. Предложеният метод за получаване тъждества и неравенства между елементите на триъгълника е лесно приложим при различни задачи.

3.6 Динамика на мотивацията за изучаване на предмета математика чрез участие на учениците в извънкласни форми на работа

Педагогическият експеримент се проведе следните направления:

– Изследване на възможността учениците от 4 – 5 клас да запознаят с елементи от теория на графите и принципа на Дирихле в ИКРМ и прилагат придобитите знания при решаване на някои класове задачи;

– Динамика на мотивацията на учениците за изучаване на предмета математика в резултат на участието им в някои форми на ИКРМ (участието им в математическа игра)

– Динамика на резултатите от представянето на учениците от II ОУ Благоевград на НВО по математика

Забележка 1. Всички изследвания с ученици са проведени в Благоевград, като за всеки експеримент ще се посочат училището, учениците и годината.

Забележка 2.. Някои от данните са предоставени Катя Михова – базов учител от II ОУ, Благоевград (за НВО и изменение, мнението на родителите)

Забележка 1. Изследването за възможностите на ученици от IV клас да прилагат „принципа на Дирихле" при решаване на някои класове задачи се проведе с ученици от 3 паралелки IV клас III СОУ; 13 ученика (7 от 4 кл. и 6 от 5 кл., като допълнително се включиха 8 ученика от 2 клас) на VI СОУ от Благоевград през 2005/2006 г.

Един от значимите критерии за дейността на учителя е динамиката на мотивацията в учениците за изучаване на предмета, който преподава. За изследването нивото на мотивацията за изучаване на математиката от учениците се приложиха следните методи:

- Анкети с ученици, учители;
- Анкети с родители на ученици;
- Наблюдение на учениците по време на учебната дейност;
- Анализ на данни от НВО;

Показатели, по които е изследван ръстът на мотивация за изучаване на предмета математика:

- Отношението на учениците към учебните задължения;
- Изменение интереса на учениците към предмета математика в продължение на 4 години;
- Участие в извънкласни форми на работа;
- Мнение на родителите за: удовлетвореност от равнището на преподаване по математика, интереса на детето им към математиката, значимостта предмета математика за образованието и за бъдещето на детето им.

Относно изследването възможностите на ученици да усвояват елементи от ТЧ и принцип на Дирихле няма констатиращ експеримент, защото изследваните учениците не са участвали в кръжок, СИП или ЗИП по математика, а тези теми не се изучават в урочната работа.

За да се покаже ползата от използване на математическа игра за развитие на познавателния интерес беше проведено проучване с ученици от II ОУ (4 – 7 кл.) и в III ОУ – IV клас и VI СОУ Благоевград. Общо в анкетното проучване участваха 160 ученика (75 ученици от II ОУ, 64 – III и 21от VI ученици от .

Анкетата съдържаше следните въпроси:

1. Провеждани ли са някога игри по математика? Колко често?
2. Харесва ли ви да участвате в такива игри ? Защо?
3. Какво ви хареса и какво не в математическа игра, в която сте участвали?
4. След провеждането на игри стана ли ви по интересна математиката?
5. Ще се занимавате ли допълнително с математика след участието ви в играта?
6. Ще участвате ли отново в математическа игра?

На първият въпрос „Провеждани ли са някога игри по математика? Колко често?" всички ученици отговарят положително, но по-често се провеждат математически игри при по-малките ученици и те обичат да участват в тях.

На втория въпрос: „Харесва ли ви да участвате в такива игри ? Защо?" повечето са отговорили с „да" 124 (77,5 %), отрицателно отговарят 14 (8,7 %), 12 – не знаят (7,5 %) и за 8 „зависи от играта" (5%).

Харесва ми да участвам в математическите игри, защото …	Брой ученици	Харесва ми да участвам в математическите игри, защото	Брой ученици
На тях е интересно	96	Не обичам математиката	8
Научаваме нови неща	16	Нямам математически наклонности	7
На тях се развива мисленето, съобра-зителността, работата в екип и др.	10	Скучно ми е	4
На тях е весело, увлекателно, забавно	12	Имам много да уча	3
Проверяват се знанията, можеш да се изявиш	14		
Харесва ми да получавам награди	8		
Просто обичам математиката	12		
Харесват ми задачите и въпросите	24		

Таблица 3.6.1

Отговорите показват, че основно причина за отрицателното отношение към математическите игри е негативното отношение към самия предмет математика, но тези ученици са значително по-малко от останалите.

За разграничаване на предимствата и недостатъците на математическите игри в сравнение с другите извънкласни форми на работа на учениците е зададен въпросът „Какво ви хареса и какво не в математическа игра, в която сте участвали?“ и отговорите са обобщени Таблица 3.6.2:

Харесват ми	Брой ученици	Не ми харесва	Брой ученици
Интересните задачи	50	Споровете с отбора на съперника	12
Сюжетните игри	12	Много е шумно	2
Печеленето	4	Загубването на играта	6
Приятно е, весело е	20	Несложните задания	8
Трябва да се мисли и смята	21	Организацията	10
Всичко	98	Не виждам смисъл	10

Таблица 3.6.2

На по-голяма част от участниците в математическата игра им харесва всичко в нея. На учещите се, които предпочитат математиката им допада, че на математическите игри е весело, забавно и трябва да се мисли.

Като недостатъци обаче се посочват дисциплината, шума, евентуално лошата организация, както и сложността и трудността на поставените задания. Изобщо играта трябва да бъде обмислена до най-малките подробности за да не възникне някакъв проблем в хода ѝ.

След участието в математически игри стана ли ви по интересна математиката?		Ще се занимавате ли допълнително с математика след участието ви в играта?	
Отговор	Брой ученици	отговор	Брой ученици
Да	112	Да	68
Не	7	Не	24
Може би	12	Може би	19
Зависи от задачите и какво научавам	29	Бих потърсил отговори на въпроси, които ме заинтригуваха	29

Таблица 3.6.3 Таблица 3.6.4

Най-съществени за това изследване се явяват 4 и 5 въпрос. „След провеждането на игри стана ли ви по интересна математиката?“ и “Ще се занимавате ли допълнително с математика след участието Ви в играта?“ съответните отговори са в Таблици 3.6.3 и 3.6.4:

От таблиците се вижда, че след участието в математически игри се повишава интересът към математиката и те биха потърсили допълнителни източници на информация, която ги интересува.

На последния въпрос „Бихте ли участвали отново в математическа игра?“ само 13 (8 %) ученика от 160 са отговорили отрицателно: 7 че „няма“ и 8 с „може би“. Това показва, че извънкласните занятия проведени под формата на игри привличат учениците и те с удоволствие биха участвали отново. Много от тях по такъв необикновен начин узнават за новото и се учат. Благодарение на такива мероприятия в училище математиката се разкрива пред учениците откъм своята привлекателна страна. Тя вече не е онзи скучен предмет и те не само с удоволствие ходят на извънкласните занятия, но и работят по-активно в редовните занятия по математика.

За по-доброто изясняване на ролята на математическата игра за развитието на познавателния интерес е порведена и анкета сред 12 учителите по математика на няколко училища от Благоевград и Кюстендил с по-голям опит. Те отговаряха на въпросите:

1. Смятате ли за необходимо да прилагате дидактичните играта в извънкласните форми на работа по математика?
2. Прилагате ли играта като форма на извънкласна работа по математика в практиката си?
3. Предимно в кои класове прилагате дидактичната играта на извънкласните форми по математика?
4. Как се отнасят към математическата игра учениците от различните класове?
5. Какви са недостатъците и каква е ефективността от прилагането на математическите игри в извънкласната работа по математика?
6. Какви трудности срещате при използването на математически игри в извънкласната работа по математика?
7. Как се е променя отношението на учениците към математиката, след провеждане на дидактичните игри?

На първият въпрос всички учители са отговорили положително.

На втория въпрос само 1 учител не прилага играта в своята работа, а всички останали поне 1 път са приложили играта в практиката си. Нещо повече, колко по-малки са учениците, толкова по-често в практиката си учителят използва играта. Чрез играта учениците от тази възраст по-добре възприемат новото учебно съдържание. Учениците от 4 – 6 клас обичат да участват в такива извънкласни мероприятия 7- 9 клас се отнасят добре към дидактичните игрите, но не към всички, докато учениците от 10 -11 клас уж сериозно се отнасят към игрите, но се интересуват от конкретни въпроси, свързани с бъдещата професия. Трима от учителите считат, че независимо от възрастта всички ученици се включват с интерес в игрите.

На 5 и 6 въпрос учителите посочват почти едни и същи предимства и недостатъци от прилагането на математическите игри в практиката. Те са дадени в следващата таблица 3.5.5.

Предимства	**Брой учители**	**Недостатъци**	**Брой учители**
Повишават интереса на учениците към математиката	10	Дейностите на учениците са трудни за оценяване	11
Мотивират учениците за дейности	2	Шумно	10
Предоставят възможност за изява на всички ученици според възможностите им	8	Често не се възприемат на сериозно	5
Контактите с връстниците и развиват комуникативните възможности на учениците,	4	Трудности при подготовката и провеждането	12
Възпитават уважение към другите и зачитани на чуждото мнение	3		

Таблица 3.6.5.

Моделирането с графи на задачи от движение, работа и пълнене на басейни бе апробирано с три групи изоставащи ученици – КГ 8 ученика; I ЕГ- 6 и II ЕГ – 7 ученици. Предложени им бяха 2 задачи от движение – ниско и средно ниво и една задача от работа. Разпределението на резултатите е дадено в Таблица 3.6.6

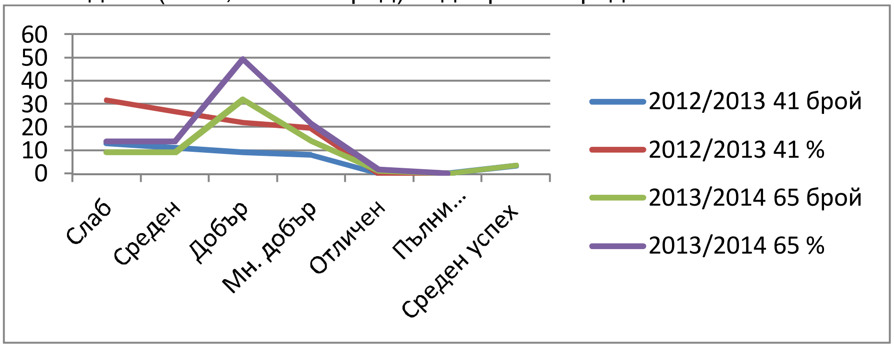
Под частично решена задача разбираме записани връзки между величините характеризиращи движението и съставено уравнение, но не е решено. Резултатът показва, че съставянето на мрежови модели помага на учениците по-лесно да видят връзките между дадените величини и търсеното в условието на задачата и да съставят уравнението. Не е обяснимо защо не могат да се справят със задачата от работа и пълненето на басейн, които са от един и същи вид. Всяка се характеризира с 3 величини: движението – с път, време и скорост, а другите – с извършена работа, време и „мощност“.

Тип задача	КГ(8 бр.)	I ЕГ (6 бр.)	II ЕГ (7 бр.)
Задача от движение ниско ниво	1 частично (записани някои връзки) решени	2 напълно решени 2 частично решени	3 напълно решени 2 частично решени

Задача от движение средно ниво	0	1 напълно решил 1 частично решил	1 напълно решил 2 частично решили
Задача от работа	0	1 частично решил	1 напълно решил 1 частично решил
Задача за басейн	0	0	0

Таблица 3.6.6

От графиката по-долу се вижда, че учениците участвали в СИП по математика в две последователни години (II ОУ, Благоевград) подобряват представянето си на НВО.



Фиг.3.6.1

Общият резултат е повишен с 0,43 в сравнение с предходната година. Намален е процентът на слабите оценки с 17,86% и процентът на средните с 12,98%. Завишен е 3.6 пъти броят на добрите оценки, изразено в проценти- с 27.28%, а на много добрите оценки повишението е с 2.03% и на отличните – с 1.54. Съхранен е процентът на много добрите. Всичко това е постигнато с помощта на системната и задълбочена подготовка по математика, запознаването с формата на изпита още в началото на учебната година, засиленото използване на формата на изпита в часовете по ЗИП и СИП и провеждане на тренировъчни изпити на училищно ниво.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящата дисертационна работа е развит модел и предложена методика за извънурочни занимания. Резултатите от направените изследвани и анализи, позволяват да бъдат определени следните ***приноси на дисертационния труд:***

Научно-приложни:

1. Предложеният метод за намиране на признак за делимост на произволно просто число p е еднотипен за всички прости числа и от ученика се изисква само да намери съответната константа. Това позволява учещите се да не помнят различни признаци за делимост например на 7, 11, 13 и т.н. и могат за 1 – 2 минути да получат съответната константа и да формулират признака за делимост p. (Предложеният начин не зависи от простото число p и алгоритъмът за намирани на константата k зависи само от последната цифра на p).
2. Посочен е начин за намиране на константата k.

Практико-приложни:

1. Предложено е учебно съдържание със структурирани по теми и класове задачи давани на състезания и допълнени от разнородни източници. (В преобладаващата част от използваните източници задачите са подредени само по класове и години и не са структурирани по теми).;
2. Предложени са авторски задачи към темите (с цел изграждане на съответната система от задачи) или предложено авторско решение, като е направено сравнение с решението в литературния източник;
3. Предложен е начин за решаване на задачи чрез използване на графи, при търсене на многоцифрени числа с определени свойства и са разработени и апробирани мрежови модели за решаване на задачи от движение, работа, пълнене на басейни и т.н., подпомагащи и онагледяващи намирането на решението и облекчава обосновката на решението, което е проблем при малките ученици;
4. Предложено е подходящо доказателство на теоремата за симетрични полиноми на три променливи. Посочено е как теорията за симетричните полиноми на три променливи може да се приложи за получаване на тъждества и неравенства свързани с елементи на триъгълника.

5. Предложени са учебно-методически разработки на теми от теория на числата, теория на графите, принцип на Дирихле и симетрични полиноми (виж приложенията към глава 3).

Сфера на приложение: Предложеното учебно съдържание и направените методически указания за обучение на учещите се в решаване на задачи с помощта на принципа на Дирихле, теория на числата и теория на графите може да бъде приложена от учителите по математика в основните и средните училища в различните извънкласни форми на работа.

Перспективи

1. Използване на електронни ресурси, като ефективен начин за представяне на съдържанието по време на извънкласните задания;
2. Разработване на банка от тематични занятия по всяка дидактична единица от учебния материал;
3. Разработване на презентации, използване на интернет-ресурси
4. Организиране на извънкласна самостоятелна работа чрез използване на мултимедийни комплекти и пособия;
5. Консултиране на учениците по Интернет, лични web-страници и сайтове учителя.

Всички тези разнородни компоненти трябва да бъдат свързани в една система. Решението на тези въпроси ще изготви индивидуални схеми за обучение на учащите се. Работа с мрежови електронни ресурси не е ограничена от строги времеви рамки, което допринася за по-дълбоко и по-трайно усвояване на учебния материал. Комбинация от текст, графика, видео, звук, анимация ще представят нещата в по-ярка и динамична форма, а формирането на самостоятелно мислене ще бъде по-осъзнато и знанията по-трайни.

ПУБЛИКАЦИИ:

1. Кацарска М., Изучаване на симетричните полиноми в задължително избираемата подготовка (ЗИП) по математика в 9-ти клас. Proceedings of Thirtieth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians Borovets, April 8 - 11, 2001, стр. 361 - 365
2. Кацарска М., К проблеме переноса знаний в обучении математике, Международной научно-практической конференции: Психолого-педагогические основы подготовки учителя в условиях реформирования общеобразовательной и высшей школы, Материалы – Часть 2, стр.207 – 210, Мозырь, 28 – 29 ноября 2002
3. Кацарска М., Изучаване на принципа на Дирихле в извънкласната работа по математика в IV – V$^{\text{-ти}}$ клас, Научна конференция с международно участие – Стара Загора, Сборник с доклади, том 1, Технически науки, 2004, стр.385 -389
4. Кацарска М., Решаване на занимателни задачи чрез графи в извънкласната работа по математика в 4 – 6$^{\text{-ти}}$ клас, Section: INFORMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES, MATHEMATICS, Сборник доклади, Благоевград, стр. 105 – 113, 2005
5. Кацарска М, Елементи от теория на графите в извънкласната работа по математика в пети и шести клас, Доклади на Тридесет и петата пролетна конференция на Съюза на математиците в България, Боровец 5-8 април 2006, стр.411 – 417
6. Мирчев И., Кацарска М., Модел на учебно съдържание за извънкласна работа по математика. Методически, организационни и управленчески аспекти, Международна научна конференция – Стара Загора, Сборник с доклади, том 5, Педагогически науки, 1 – 2 юни 2006, стр.224 – 229
7. Мирчев И., М. Кацарска, Използване на нестандартни подходи при решаване на задачи по математика в началното училище, сп. “Начално училище” бр. 5 (септември – октомври) 2006 г.
8. Кацарска М., Прилагане на диференцирания подход при решаване на задачи за делимост на цели числа, сп. “Начално училище” бр. 6 (ноември – декември) 2006 г.
9. Кацарска М, М. Тодорова, Играта в обучението по математика, Доклади на Тридесет и девета пролетна конференция на Съюза на математиците в България, април 2010.