



Югозападен университет „Неофит Рилски“
Природо-математически факултет
Катедра „Математика“

СИЛВИЯ ГЕОРГИЕВА БАЙЧЕВА

***„КОЛИЧЕСТВЕНИ МЕРКИ ЗА
РАЗПРЕДЕЛЕНИЕТО НА ХИБРИДНИ
РЕДИЦИ И МРЕЖИ И ТЯХНОТО
ПРИЛОЖЕНИЕ В КВАЗИ-МОНТЕ КАРЛО
ИНТЕГРИРАНЕТО“***

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователна и
научна степен „Доктор“ в област на висше
образование 4. Природни науки, математика и
информатика, професионално направление 4.5.
Математика, докторска програма: Математически
анализ

Научен ръководител:
/доц. д-р Васил Грозданов/

Благоевград 2016 г.

Дисертационният труд се състои от увод, четири глави и цитирана литература. Литература се състои от 79 заглавия, от които 2 на руски език , 2 на френски, 8 на немски език и 67 на английски език. Общият обем на дисертацията е 221 страници. Размерът на страницата е А4.

Дисертационният труд е обсъден и предложен за защита на разширено заседание на катедра „Математика“ към Природо-математически факултет при Югозападен университет „Неофит Рилски“ – Благоевград, състояло се на 23.03.2016 г.

Състав на научното жури:

1. акад. проф. д.м.н. Бл. Сендов
2. чл. – кор. проф. дмн О. Мушкаров
3. проф. д.т.н. Ив. Димов
4. доц. д-р В. Грозданов
5. доц. д-р В. Ристовска

Защитата на дисертационният труд ще се състои на 18.05.2016 г. от 16:00 часа в зала 402.

Съдържание

0.1	Обща характеристика на дисертационния труд . .	5
0.1.1	Актуалност на темата	5
0.1.2	Цели на дисертационния труд	6
0.1.3	Предмет на изследване	6
0.1.4	Методи на изследване	6
0.1.5	Апробация	7
0.2	Увод	7
1.	<i>Някои основни понятия и твърдения от теорията на равномерно разпределените редици и квази-Монте Карло интегрирането</i>	8
1.1	Някои класове ортонормирани функционални системи	8
1.2	Исторически сведения	8
1.3	Равномерно разпределени редици	9
1.4	Примери на равномерно разпределени редици . .	10
1.5	Количествени мерки за равномерно разпределение на редици	12
1.6	Квази-Монте Карло интегриране в Хилбертови пространства	12
2.	<i>Тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$-диафония</i>	14
2.1	Постановка на задачата	14
2.2	$(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ -диафонията	15
2.3	Изчислителната сложност на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ -диафония	16

2.4	Върху точните порядъци на $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ -диафонията на обобщената редица на Ван дер Корпут	17
2.5	Апендикс – Доказателства на някои използвани резултати	23
3.	Многомерно интегриране в Хилбертовото пространство $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$	24
3.1	Постановка на задачата	24
3.2	Формула за грешката на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$	25
3.3	Връзка между тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ -диафония и грешката на интегрирането $e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}; P_N)$ в пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$	26
3.4	Върху порядъците на грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$	27
3.5	Заклучение	31
4.	Хибридна теглова диафония	33
4.1	Основни функционални системи	33
4.2	Хибридна функционална система	34
4.3	Обзор на известни типове диафонии	36
4.4	Постановка на задачата	36
4.5	Хибридната теглова диафония $F_N^{hybrid}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$	37
4.6	Изчислителната сложност на хибридната теглова диафония	39
4.7	Върху грешката на интегрирането в хибридното теглово пространство $H_{\mathcal{F}, \alpha, \gamma}^{hybrid}$	40
5.	Заклучение	44
6.	Цитирана Литература	46
6.1	Приноси на автора	48
6.2	Статии на автора по темата на дисертацията	49
6.3	Декларация за оригиналност	50

0.1 *Обща характеристика на дисертационния труд*

0.1.1 *Актуалност на темата*

В редица научни области, като числени методи, финансова математика, различни клонове на физиката и други, често се налага приближеното пресмятане на s -мерни определени интеграли. Тяхното пресмятане понякога е много трудно, даже и невъзможно. Поради тази причина, се налага тяхното приближено пресмятане. Квази-Монте Карло интегрирането е един успешен апарат за приближено пресмятане на този тип интеграли. Основна идея на този числен метод е за възли на интегрирането да се използват точки от тъй наречените равномерно разпределени редици.

Поради тази причина теорията на равномерно разпределените редици има свое самостоятелно развитие. Основна идея на тази теория е изследването на количествени мерки, които показват качеството на разпределението на точките на този тип редици. Най-общо, тези количествени характеристики са дискрепансът и диафонията.

Поради геометричния характер на дискрепанса, изследването му е по-трудно, отколкото изследването на диафонията, която има аналитичен характер.

Хибридните редици и мрежи са съвсем нов клас от обекти, конструирани като се използват различни техники, за отделните координати на тези мрежи и редици. По този начин, на практика се свързват в една обща идея предимствата на Монте Карло и квази-Монте Карло методите.

Различните типове на хибридните диафонии, дефинирани след 2010 г., са именно такива мерки за качеството на разпределението на класове от хибридни мрежи и редици.

Имайки предвид горните факти, разбира се и много други съображения от теоретичен и практичен аспект, се постави и разви темата на настоящата дисертация.

0.1.2 Цели на дисертационния труд

Целите на дисертацията са:

1. Да се изследват някои версии на b -ичната диафония, като количествена мярка за неравномерността на разпределението на редици.

2. Да се намерят точните порядъци, в зависимост от участващите в дефиницията на тази диафония параметри, на някои класове от редици.

3. Да се представи грешката на интегрирането в някои класове от Хилбертови пространства в термините на новия тип диафония.

4. Да се получат порядъците на грешката на интегрирането на функции от въведените Хилбертови пространства.

5. Да се въведе нова мярка за изследване на неравномерността на класове от хибридни редици.

0.1.3 Предмет на изследване

Предмет на изследването е въвеждането на количествени характеристики за разпределение на редици, каквито са тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ -диафония и хибридната теглова диафония $F_N^{hybrid}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$ на произволна редица ξ от точки в $[0, 1]^s$. Въвеждане на функционални класове, които са Хилбертови пространства, генерирани от специални пораждащи ядра и представяне на грешката на интегрирането в тези функционални класове в термините на въведените диафонии.

0.1.4 Методи на изследване

За изпълнение на поставените цели са използвани методи на аналитичната теория на числата, методите на квази-Монте Карло интегрирането в Хилбертови пространства, методи за оценки на тригонометричните суми по отношение на различни ортонормирани функционални системи. Основните резултати са получени чрез прилагане на техники от функционалния анализ и числените методи.

0.1.5 Аprobация

Резултатите получени в дисертацията са докладвани на следните конференции:

1.) 4th International Conference on Uniform Distribution Theory, 2014, Ostravice, Czech Republic.

2.) V Congress of Mathematicians of Macedonia, Ohrid, R. Macedonia, September 24-27.2014.

3.) Sixth International Conference FMNS – 2015, 10-14.06.2015, Blagoevgrad, Bulgaria.

0.2 Увод

Математическата наука, която изследва разпределението на редици и мрежи (крайни редици) в единичния s -мерен куб $[0, 1]^s$ се развива динамично в последните години. Големият интерес към редици и мрежи с добро разпределението на своите елементи от теоретична гледна точка се обуславя от многобройните приложения на тези математически обекти в редица области на познанието, като числено интегриране, финансова математика, генетика и други науки.

Дисертацията се състои от увод, четири глави, заключение и цитирана литература. В тази дисертация са въведени нови количествени характеристики на разпределението на редици, от типа на диафонията. Показани са редица приложения на въведените типове диафонии в теорията и практиката на квази-Монте Карло интегрирането.

В работата са използвани различни техники за достигане до същността на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ -диафония и хибридната теглова диафония $F_N^{hybrid}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$ на произволна редица от точки в $[0, 1]^s$.

1. НЯКОИ ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ И ТВЪРДЕНИЯ ОТ ТЕОРИЯТА НА РАВНОМЕРНО РАЗПРЕДЕЛЕНИТЕ РЕДИЦИ И КВАЗИ-МОНТЕ КАРЛО ИНТЕГРИРАНЕТО

В първа глава на дисертацията са въведени някои основни понятия и твърдения от теорията на равномерно разпределените редици и квази-Монте Карло интегрирането. Целта на тази глава е да въведе читателя в проблематиката на равномерно разпределените редици и квази-Монте Карло интегрирането, които са тясно свързани с дисертацията.

1.1 Някои класове ортонормирани функционални системи

В параграф 1.1 са припомнени дефинициите и свойствата на някои ортонормирани функционални системи, каквито са тригонометричната функционална система, Уолш функционалната система, Уолш функции над крайни групи и ортонормираната система на Виленкин функциите. Те са тясно свързани с необходимите и достатъчни условия, за това, една редица да бъде равномерно разпределена.

1.2 Исторически сведения

В параграф 1.2 са представени кратки исторически сведения за развитието и генезиса на основните понятия от теорията на равномерното разпределение на редици, чиято основна задача е да онагледя теоретичната част от настоящата проблематика.

1.3 Равномерно разпределени редици

В параграф 1.3 са дадени основните понятия и твърдения от теорията на равномерно разпределението редици, а именно дефиницията, за това една редица да бъде равномерно разпределена в едномерния и многомерния случай.

Нека $s \geq 1$ да бъде фиксирано цяло и $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ да бъде произволна редица от точки в s -мерния единичен куб $[0, 1]^s$.

Нека $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s) \in [0, 1]^s$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_s) \in [0, 1]^s$ са два произволни вектора. Ще казваме, че е изпълнено неравенството $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ ако за $1 \leq j \leq s$ е в сила неравенството $a_j \leq b_j$. Нека

$J = \prod_{j=1}^s [a_j, b_j]$ да бъде съответния подинтервал на $[0, 1]^s$. Нека

$N \geq 1$ да бъде произволно цяло. Нека да означим

$$A_N(\xi; J) = \#\{n : 0 \leq n \leq N-1, \mathbf{x}_n \in J\}.$$

Дефиниция 1.11 (Херман Вайл) Редицата ξ се нарича равномерно разпределена в $[0, 1]^s$ ако граничното равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N(\xi; J)}{N} = \prod_{j=1}^s (b_j - a_j)$$

е изпълнено за всеки подинтервал J на $[0, 1]^s$.

Теорема 1.3 (интегрален критерий на Вайл) Редицата $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ е равномерно разпределена в $[0, 1]^s$ тогава и само тогава, когато за всяка комплекснозначна непрекъсната функция f , дефинирана над $[0, 1]^s$, е в сила граничното равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) = \int_{[0, 1]^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Тази теорема показва, че равномерно разпределените редици могат да се използват за приблизително пресмятане на определени интеграли от много широк клас от функции.

Теорема 1.4 (експоненциален критерий на Вайл) *Редицата $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ е равномерно разпределена в $[0, 1]^s$ тогава и само тогава когато граничното равенство*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_n \rangle} = 0$$

е изпълнено за всеки вектор от цели числа $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s$ и $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$.

1.4 Примери на равномерно разпределени редици

В параграф 1.4 са представени аналитични конструкции на редици, които са равномерно разпределени по модул 1.

В параграф 1.1.4 се дефинират едномерната и многомерната редица на Вайл.

В параграф 1.4.2 се дефинират едномерната и многомерната редица на Ван дер Корпут.

В параграф 1.4.3 се припомня конструктивният принцип на тъй наречената обобщена редица на Ван дер Корпут. Предвид важността на тази редица за настоящата работа, тук се припомня нейната конструкция.

Дефиниция 1.13 *Нека $\Sigma = (\sigma_i)_{i \geq 0}$ да бъде произволна редица от пермутации над множеството $\{0, 1, \dots, b-1\}$. За произволно неотрицателно цяло число n с b -ично представяне от вида*

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n) b^i,$$

се полагат

$$S_b^{\Sigma}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i(a_i(n)) b^{-i-1}.$$

Редицата $S_b^{\Sigma} = (S_b^{\Sigma}(n))_{n \geq 0}$ се нарича обобщена редица на Ван дер Корпут.

В параграф 1.4.4 са представени дефинициите на специални класове от s -мерни мрежи и редици, тъй наречените (t, m, s) -

мрежи и (t, s) - редици. Върху изследванията на тези добре разпределени мрежи са работили много автори, като Соболев [Со 1], Фор [Фо 2] и други. За (t, m, s) - мрежи и (t, s) - редици са разработени ефективни алгоритми, които се прилагат в численото квази-Монте Карло интегриране.

Следвайки Нидерайтер [Нид 1], [Нид 2] се припомнят теоретичните основи и конструктивния принцип на тъй наречените (t, m, s) - мрежи при основа $b \geq 2$.

Дефиниция 1.14 *Интервал от вида*

$$J = \prod_{j=1}^s \left[\frac{a_j}{b^{d_j}}, \frac{a_j + 1}{b^{d_j}} \right),$$

където за $1 \leq j \leq s$ $d_j \geq 0$ и $0 \leq a_j < b^{d_j}$ са цели числа, се нарича елементарен интервал при основа b .

Дефиниция 1.15 *Нека $m \geq 0$ и $0 \leq t \leq m$ са дадени фиксирани цели числа. Мрежата P , състояща се от b^m на брой точки от интервала $[0, 1]^s$, се нарича (t, m, s) - мрежа при основа b , ако всеки елементарен b -ичен интервал с обем b^{t-m} , съдържа точно b^t точки от мрежата P .*

В следващата дефиниция е разгледано понятието b -ичен участък от редица.

Дефиниция 1.16 *Ще наричаме b -ичен участък от редица $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \dots$ множеството от елементите $\mathbf{x}_i$, номерата i на които удовлетворяват следните неравенства*

$$kb^p \leq i < (k+1)b^p,$$

където $k = 0, 1, \dots, p = 1, 2, \dots$

Дефиниция 1.17 *Редицата $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ от точки в $[0, 1]^s$ се нарича (t, s) -редица, ако всеки нейн b -ичен участък с дължина b^m е (t, m, s) - мрежа при основа b , за всяко m такова, че $t \leq m$.*

Показан е следният матричен подход за конструиране на (t, m, s) -мрежи при основа b . И така, детайлите са следните:

За $1 \leq j \leq s$ нека C_j са дадени $m \times t$ матрици над $Z_b = \{0, 1, \dots, b-1\}$. Нека произволно цяло n , такова, че $0 \leq n \leq$

$b^m - 1$, с b -ично представяне от вида $n = n_0 + n_0b + \dots + n_{m-1}b^{m-1}$ се идентифицира с вектора $n = (n_0, n_1, \dots, n_{m-1})^T$. За $1 \leq j \leq s$ нека да умножим матрицата C_j с n и да се въведе означението

$$C_j \cdot n = (x_{j,n,1}, x_{j,n,2}, \dots, x_{j,n,m})^T.$$

Дефинират се точките

$$x_{j,n} = \frac{x_{j,n,1}}{b} + \frac{x_{j,n,2}}{b^2} + \dots + \frac{x_{j,n,m}}{b^m}$$

и вектора $x_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{s,n})$. Ако за някакво цяло число t такова, че $0 \leq t \leq m$, точковата мрежа $P_{b^m} = (x_0, x_1, \dots, x_{b^m-1})$ е (t, m, s) - мрежа, тогава тя се нарича дигитална (t, m, s) - мрежа при основа b .

1.5 Количествени мерки за равномерно разпределение на редици

В параграф 1.5 са дефинирани количествени мерки за равномерно разпределени редици, каквито са екстремалният дискрепанс, звезда-дискрепансът, класическата диафония на Цинтерхоф [Цин 1], b -ичната диафония, тегловата b -ична диафония.

1.6 Квази-Монте Карло интегриране в Хилбертови пространства

В параграф 1.6 се дават сведения от теорията на квази-Монте Карло интегрирането в Хилбертови пространства.

Следвайки Аранжоян [Ар 1], е припомнена концепцията за пораждащи ядра на Хилбертови пространства. Нека F е клас от функции дефинирани над E , образуващи Хилбертово пространство. Функцията $K(x, y)$, където $x, y \in E$ се нарича пораждащо ядро на F , ако са изпълнени следните две условия:

1. за всяко фиксирано $y \in E$, функцията $K(x, y)$, разгледана като функция на x , принадлежи на F ;

2. (**пораждащо свойство**) за всяка функция $f \in F$ и за всяко $y \in E$ е в сила равенството

$$f(y) = \langle f(x), K(x, y) \rangle_x,$$

където индексът x показва, че скаларното произведение се взема по отношение на променливата x .

Нека $H_s(K)$ да бъде Хилбертово пространство с пораждащо ядро $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : [0, 1]^{2s} \rightarrow \mathbb{C}$ и норма $\|\cdot\|_{H_s(K)}$. Обект на интерес е апроксимирането (приближеното пресмятане) на многомерния интеграл

$$I_s(f) = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad f \in H_s(K).$$

Нека $N \geq 1$ е произволно фиксирано цяло. Интегралът $I_s(f)$ се апроксимира чрез квази-Монте Карло алгоритъм с равни квадратурни тегла

$$Q_s(f; P_N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n),$$

където $P_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ е детерминирана точкова мрежа, състояща се от N точки в $[0, 1]^s$.

Дефиниция 1.23 Грешката на интегрирането в Хилбертовото пространство $H_s(K)$, чрез използване на квази-Монте Карло алгоритъма $Q_s(f; P_N)$, се дефинира като

$$e(H_s(K); P_N) = \sup_{f \in H_s(K), \|f\|_{H_s(K)} \leq 1} |I_s(f) - Q_s(f; P_N)|,$$

където супремумът се взема по всяка функция от $H_s(K)$, на която съответната норма е по-малка или равна на едно.

2. ТЕГЛОВАТА $(\mathcal{W}(B); \alpha; \beta; \gamma)$ – ДИАФОНИЯ

Във втора глава от дисертацията е предложен нов вид на b –ичната диафония, тъй наречената теглова $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония. Показано е, че тя е количествена мярка за неравномерността на разпределението. Намерена е изчислителната сложност на разглежданата в дисертацията характеристика. Получени са оценки отгоре и отдолу на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония на обобщената редица на Ван дер Корпут, в зависимост от параметрите α и β . Това дава възможност да се получи точният порядък $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right)$, в случая когато $\alpha = 2$, а $\beta = 1$ и $\beta = 2$. А когато параметърът $\alpha > 2$, се получава точния порядък $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ – диафония на обобщената редица на Ван дер Корпут.

2.1 Постановка на задачата

В тази глава на дисертацията са поставени за решаване следните задачи:

Задача 2.1 Да се дефинира нова версия на b –ичната диафония, така наречената теглова $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония, която се основава на използването на Уолш функциите от ред b и коефициенти, които са дефинирани чрез равенството (2.3).

Задача 2.2 Да се докаже, че тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ – диафония е количествена характеристика за равномерно разпределение на редици.

Задача 2.3 Да се намери изчислителната сложност на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония.

Задача 2.4 Да се намерят точните порядъци, в зависимост от параметрите α и β , на $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафонията на обобщената редица на Ван дер Корпут.

2.2 $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафонията

В параграф 2.2 се дефинира понятието теглова $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония и е доказано, че тя е количествена характеристика за равномерно разпределение на редици.

В дефиниция 2.2 от дисертацията е представена концепцията на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония.

Дефиниция 2.2 Нека $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ да бъде произволна редица от точки в $[0, 1)^s$. За всяко цяло $N \geq 1$ тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония на първите N елемента на редицата ξ се дефинира като

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; \xi) = \left(\frac{1}{C(\alpha; \beta; \gamma; b)} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s \setminus \{\mathbf{0}\}} R(\alpha; \beta; \gamma; b; \mathbf{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b^{\text{wal}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

където коефициентите $R(\alpha; \beta; \gamma; b; \mathbf{k})$ и $C(\alpha; \beta; \gamma; b)$ са дефинирани съответно с равенствата (2.3) и (2.4) от дисертацията.

Като частен случай от Дефиниция 2.2 се получават следните известни до сега типове диафонии:

1. Ако в Дефиниция 2.2 се положи $\beta = 1$, то получената диафония $F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; 1; \gamma; \xi)$ е точно тегловата b –ична диафония, представена в [Гр 1].

2. Ако в Дефиниция 2.2 се положи $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = (1, \dots, 1)$, то получената диафония е точно b –ична диафония, дефинирана от Грозданов и Стоилова [Гр Ст. 2].

3. Ако в Дефиниция 2.2 се положи $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = (1, \dots, 1)$ и $b = 2$, то получената диафония е точно диадичната диафония, дефинирана от Хелекалек и Лииб [Хе Ли 1].

В теорема 2.1 е представен един от основните факти от теорията на равномерно разпределените редици, който показва, че

тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония е количествена мярка за неравномерността на разпределението на редици.

Теорема 2.1 *Редицата $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ от точки в $[0, 1)^s$ е равномерно разпределена тогава и само тогава, когато граничното равенство*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; \xi) = 0$$

е в сила за произволно реално $\alpha > 1$, за фиксирано цяло $\beta \geq 1$ и за произволен вектор γ от положителни ненарастващи тегла.

2.3 Изчислителната сложност на тегловата

$(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония

В параграф 2.3 е показана изчислителната сложност на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония.

За дадените параметри $\alpha > 1$, $\beta \geq 2$ и вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ от тегла е конструирана функцията

$$\begin{aligned} & \Phi(\alpha; \beta; \gamma; b; \mathbf{x}) \\ &= -1 + \prod_{j=1}^s \varphi(\alpha; \beta; \gamma_j; b; x_j), \quad \mathbf{x} \in (x_1, \dots, x_s) \in [0, 1)^s, \end{aligned} \quad (2.12)$$

където функцията $\varphi(\alpha; \beta; \gamma_j; b; x_j)$ е дефинирана в явен вид чрез равенство (2.8) от дисертацията.

Показана е следната теорема:

Теорема 2.2 *Нека $N \geq 1$ е произволно цяло и $\xi_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ е произволна мрежа, състояща се от N точки в $[0, 1)^s$ така, че координатите на $\mathbf{x}_n$ удовлетворяват условието (C1) или (C2), по специално координатите на $\mathbf{x}_n$ са b -ични рационални. Тогава, тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; \xi_N)$ –диафония на мрежата ξ_N удовлетворява равенството*

$$\begin{aligned} & F^2(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; \xi_N) \\ &= \frac{1}{C(\alpha; \beta; \gamma; b)} \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi(\alpha; \beta; \gamma; b; \mathbf{x}_n \ominus_b^s \mathbf{x}_m), \end{aligned}$$

където функцията $\Phi(\alpha; \beta; \gamma; b; \mathbf{x})$ е дефинирана чрез равенство (2.12), а константата $C(\alpha; \beta; \gamma; b)$ е дефинирана чрез равенство (2.4) от дисертацията.

Теорема 2.2 ни дава, че за всяко фиксирано $\beta \geq 2$, **изчислителната сложност на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония на произволна мрежа, състояща се от N точки, е $\mathcal{O}(N)^2$.**

В подпараграф 2.3.2 са представени предварителни резултати, оформени в лемии, чрез които се доказва Теорема 2.2.

В подпараграф 2.3.3 е представено доказателството на Теорема 2.2.

2.4 Върху точните порядъци на $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафонията на обобщената редица на Ван дер Корпут

В подпараграф 2.4.1 са получени точните порядъци на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония на обобщената редица на Ван дер Корпут.

Нека $N \geq 1$ е произволно цяло и има b –ично представяне от вида

$$N = a_1 b^{\nu_1} + a_2 b^{\nu_2} + \dots + a_t b^{\nu_t}, \quad (2.15)$$

където $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_t \geq 0$ и за $1 \leq j \leq t$ $a_j \in \{1, 2, \dots, b-1\}$.

В следващите няколко теореми са показани точните порядъци на $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафонията на редицата S_b^Σ . В случая когато $\beta = 1$ и $\beta = 2$ се получава асимптотичното поведение на съответната диафония.

Теорема 2.3 Нека $S_b^\Sigma = (S_b^\Sigma(n))_{n \geq 0}$ е произволната обобщена редица на Ван дер Корпут.

Нека $\alpha \geq 2$ е произволно реално и $\beta = 1$. За всяко цяло $N \geq 1$ от вида (2.15), тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta = 1; \gamma)$ –диафония $F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta = 1; \gamma; S_b^\Sigma)$ на редицата S_b^Σ удовлетворява неравенството

$$(N \cdot F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta = 1; \gamma; S_b^\Sigma))^2$$

$$\leq \frac{(b^{2\alpha} - 1)(2b^2 - 4b + 1) + bb^\alpha - b^\alpha - 2b}{(b^\alpha - 1)(b^\alpha - b)} \sum_{j=1}^t b^{(2-\alpha)\nu_j}.$$

Нека $\alpha = 2$. Тогава имаме следното:

(i) (оценка отгоре) За всяко цяло $N \geq 1$ е в сила неравенството

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha = 2; \beta = 1; \gamma; S_b^\Sigma) \leq \sqrt{\frac{2b^5 - 4b^4 + b^3 - b^2 + 5b - 3}{(b-1)^2(b+1)\log b}} \cdot \frac{\sqrt{\log[(b-1)N+1]}}{N}.$$

(ii) (асимптотично поведение) В сила е, че

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha = 2; \beta = 1; \gamma; S_b^\Sigma) \in \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right).$$

Нека $\alpha > 2$. Тогава се получа следното:

(iii) (оценка отгоре) За всяко цяло $N \geq 1$ е в сила неравенството

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta = 1; \gamma; S_b^\Sigma) \leq \frac{1}{N} \sqrt{A_1(b) - A_2(b)} \cdot \frac{1}{N^{\alpha-2}},$$

където константите $A_1(b)$ и $A_2(b)$ са дефинирани в явен вид в дисертацията.

(iv) (асимптотично поведение) В сила е, че

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta = 1; \gamma; S_b^\Sigma) \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Теорема 2.4 Нека $S_b^\Sigma = (S_b^\Sigma(n))_{n \geq 0}$ е произволната обобщена редица на Ван дер Корпут.

Нека $\alpha \geq 2$ е произволно реално и $\beta = 2$. За всяко цяло $N \geq 1$ от вида (2.15), тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ -диафония $F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; S_b^\Sigma)$ на редицата S_b^Σ удовлетворява неравенството

$$(N \cdot F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; S_b^\Sigma))^2$$

$$\leq \frac{(b^{2\alpha} - b)(b^\alpha - b)(b^{2\alpha} - 1)}{\gamma(b-1)[b^{5\alpha} - (b^2 + 1)b^{3\alpha} + b^2b^\alpha]} \times \\ \times \left[C_1(\alpha; b) \sum_{j=1}^t b^{(2-\alpha)\nu_j} + C_2(\alpha; b) \sum_{j=1}^t b^{2(1-\alpha)\nu_j} + C_3(\alpha; b) \right],$$

където константите $C_1(\alpha; b)$, $C_2(\alpha; b)$ и $C_3(\alpha; b)$ са дефинирани в явен вид в дисертацията.

Нека $\alpha = 2$. Тогава имаме следното:

(i) (оценка отгоре) В сила е неравенството

$$(N.F_N(\mathcal{W}(b); \alpha = 2; \beta = 2; \gamma; S_b^\Sigma))^2 \\ \leq C_4(b) \log[(b-1)N + 1] + C_5(b) + C_6(b) \frac{1}{N^2},$$

където константите $C_4(b)$, $C_5(b)$ и $C_6(b)$ са дефинирани в явен вид в дисертацията.

(ii) (асимптотично поведение) В сила е, че

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha = 2; \beta = 2; \gamma; S_b^\Sigma) \in \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right).$$

Нека $\alpha > 2$. Тогава се получава следното:

(iii) (оценка отгоре) В сила е неравенството

$$(N.F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta = 2; \gamma; S_b^\Sigma))^2 \\ \leq C_7(\alpha; b) + C_8(\alpha; b) \frac{1}{N^{\alpha-2}} + C_9(\alpha; b) \frac{1}{N^{2(\alpha-1)}},$$

където константите $C_7(\alpha; b)$, $C_8(\alpha; b)$ и $C_9(\alpha; b)$ са дефинирани в явен вид в дисертацията.

(iv) (асимптотично поведение) В сила е, че

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; S_b^\Sigma) \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Теорема 2.5 Нека $S_b^\Sigma = (S_b^\Sigma(n))_{n \geq 0}$ е произволна обобщена редица на Ван дер Корпут.

Нека $\alpha = 2$ е фиксирано реално и $\beta = 1$. Тогава имаме следното:

(i) (оценка отдолу) Неравенството

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha = 2; \beta = 1; \gamma; S_b^\Sigma) \geq \sqrt{\frac{b-1}{8b \log b}} \cdot \frac{\sqrt{\log N}}{N}$$

е изпълнено за безбройно много стойности на N от вида $N = 101 \dots 101$, където броят на единиците е r , $r \geq 1$.

(ii) (асимптотично поведение) В сила е, че

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha = 2; \beta = 1; \gamma; S_b^\Sigma) \in \Omega\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right).$$

Нека $\alpha > 2$ и $\beta = 1$. Тогава се получава следното:

(iii) (оценка отдолу) Неравенството

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta = 1; \gamma; S_b^\Sigma) \geq \sqrt{\frac{b^\alpha - b}{b^\alpha}} \cdot \frac{1}{N}$$

е изпълнено за безбройно много стойности на N от вида $N = b^\nu + 1$, където $\nu > 0$ е произволно цяло.

(iv) (асимптотично поведение) В сила е, че

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta = 1; \gamma; S_b^\Sigma) \in \Omega\left(\frac{1}{N}\right).$$

Теорема 2.6 Нека $S_b^\Sigma = (S_b^\Sigma(n))_{n \geq 0}$ е произволна обобщена редица на Ван дер Корпут.

Нека $\alpha = 2$ и $\beta = 2$. Тогава се получава следното:

(i) (оценка отдолу) Неравенството

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha = 2; \beta = 2; \gamma; S_b^\Sigma)$$

$$\geq \frac{1}{b} \cdot \sqrt{\frac{(b^4 - 1)(b^3 - 1)(b - 1)}{8[b^6 - (b^2 + 1)b^2 + 1]\log b}} \cdot \frac{\sqrt{\log N}}{N}$$

е изпълнено за безбройно много стойности на N от вида $N = 101 \dots 101$, където броят на единиците е r , $r \geq 1$.

(ii) (асимптотично поведение) В сила е, че

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha = 2; \beta; \gamma = 2; S_b^\Sigma) \in \Omega\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right).$$

Нека $\alpha > 2$ е фиксирано реално и $\beta = 2$. Тогава се получава следното:

(iii) (оценка отдолу) Неравенството

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta = 2; \gamma; S_b^\Sigma) \geq \sqrt{\frac{(b^{2\alpha} - b)(b^\alpha - b)(b^{2\alpha} - 1)}{b^{5\alpha} - (b^2 + 1)b^{3\alpha} + b^2b^\alpha}} \cdot \frac{1}{N}$$

е в сила за безбройно много стойности на N от вида $N = b^\nu + 1$, където $\nu > 0$ е произволно цяло.

(iv) (асимптотично поведение) В сила е, че

$$F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta = 2; \gamma; S_b^\Sigma) \in \Omega\left(\frac{1}{N}\right).$$

В случая когато $\alpha = 2$ ($\beta \geq 1$) се получава следното: В Теорема 2.3 (ii) и Теорема 2.4 (ii) получаваме порядък $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right)$ на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ -диафония на обобщената редица на Вад дер Корпут. В Теорема 2.5 (ii) и Теорема 2.6 (ii) се получава, че за безбройно много стойности на N е в сила включването $F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; S_b^\Sigma) \in \Omega\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right)$. Тези резултати показват че полученият порядък $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right)$ на $F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; S_b^\Sigma)$ е точен.

В случая когато $\alpha > 2$ ($\beta \geq 1$) се получава следното: В Теорема 2.3 (iv) и Теорема 2.4 (iv) резултатът е порядъкът $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония на обобщената редица на Ван дер Корпут. В теорема 2.5 (iv) и Теорема 2.6 (iv) се получава, че за безбройно много стойности на N е в сила включването $F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; S_b^\Sigma) \in \Omega\left(\frac{1}{N}\right)$. Тези резултати показват, че полученният порядък $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ на $F_N(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; S_b^\Sigma)$ е точен.

По-добрият порядък $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ се дължи на факта, че при $\alpha > 2$ се използват коефициенти $\rho(\alpha; \beta; \gamma; b; k)$ които имат по-бърза скорост на клонене към нула, отколкото скоростта на клонене на коефициентите $\rho(\alpha; \beta; \gamma; b; k)$ която съответства на стойността $\alpha = 2$.

В този случай когато $\alpha = 2$ и $\beta \geq 1$ от Теорема 2.3 (ii) и Теорема 2.4 (ii) се получава, че b –ичната диафония на обобщената редица на Ван дер Корпут има точен порядък $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right)$. Този резултат е показан по-рано в [ГрСт 2].

Показано е, че точният порядък на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония на редицата на Ван дер Корпут зависи от параметъра α . Така, се реализира първата мотивация за избора на параметъра α . Отбелязва се, че точният порядък $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония на редица S_b^Σ се подобрява в случая $\alpha > 2$.

В подпараграф 2.4.2 е представена Лема 2.5, като предварителна стъпка за доказателството на основните теореми, представени в предходния параграф.

В подпараграф 2.4.3 е представена лема 2.6, където е показана оценката отгоре на тригонометричната сума на обобщената редица на Ван дер Корпут.

В следващите подпараграфи в дисертацията са представени доказателствата на Теорема 2.3, Теорема 2.4, Теорема 2.5 и Теорема 2.6

*2.5 Апендикс — Доказателства на някои
използвани резултати*

В параграф 2.5 на дисертацията може да се проследят доказателствата на Лема 2.1, Лема 2.2, Лема 2.3, Лема 2.4 и Лема 2.5.

3. МНОГОМЕРНО ИНТЕГРИРАНЕ В ХИЛБЕРТОВОТО ПРОСТРАНСТВО $H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$

В трета глава на дисертацията е въведено тегловото Хилбертово пространство $H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$. Получена е точна формула за грешката на интегрирането в това пространство, чрез използване на квази-Монте Карло алгоритъма. Намерена е връзката между $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафонията и грешката $e(H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}; P_N)$ на интегрирането в това пространство. Получени са порядъците на грешката на интегрирането $e(H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}; P_{b^m})$ в дефинираното пространство $H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$, чрез използването на конкретна (t, m, s) –мрежа.

3.1 Постановка на задачата

В тази глава са поставени за решаване следните задачи:

Задача 3.1 Да се дефинира Хилбертово пространство $H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$, основаващо се на системата на Уолш функциите и зависещо от параметрите α, β и γ .

Задача 3.2 Да се получи формула за грешката $e(H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}; P_N)$ на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$.

Задача 3.3 Да се намери връзката между грешката $e(H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}; P_{Nx})$ на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$ и тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония на мрежата P_N .

Задача 3.4 Да се намерят порядъците на грешката $e(H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}; P_{b^m})$ на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$, чрез използването на (t, m, s) –мрежа.

3.2 Формула за грешката на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$

В този параграф е дефинирано пространството $H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$ и е изведена формулата за грешката на интегрирането в това пространство. Това са решенията на поставените задачи 3.1 и 3.2.

В глава втора чрез формула (2.3) от дисертацията бяха дефинирани специални коефициенти $R(\alpha; \beta; \gamma; b; k)$. Те са използвани за дефиниране на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ -диафония. Тук същите коефициенти са използвани за дефинирането на специални функции, които са пораждащи ядра.

За произволно реално $\alpha > 1$, цяло фиксирано $\beta \geq 1$ и цяло $k \geq 0$ се дефинира коефициентът

$$\rho(\alpha; \beta; \gamma; b; k) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0, \\ \gamma b^{-\alpha \sum_{i=1}^{min(\#k, \beta)} g_i}, & \text{ако } k \neq 0. \end{cases}$$

Представена е и многомерната версия на коефициентите. За вектор $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$ и вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ от тегла, се дефинира коефициентът

$$R(\alpha; \beta; \gamma; b; \mathbf{k}) = \prod_{j=1}^s \rho(\alpha; \beta; \gamma_j; b; k_j). \quad (3.5)$$

За две произволни функции f и g , дефинирани над $[0, 1]^s$, се определя скаларното произведение, чрез формулата

$$\begin{aligned} & \langle f, g \rangle_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s} R^{-1}(\alpha; \beta; \gamma; b; \mathbf{k}) \hat{f}_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}(\mathbf{k}) \hat{g}_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

където $\hat{f}_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}(\mathbf{k})$ и $\hat{g}_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}(\mathbf{k})$ означават коефициентите на Фурие за функциите f и g .

За произволна функция f , нормата $\| \cdot \|_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$ се дефинира като

$$\|f\|_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}}.$$

Тогава пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$ се дефинира като

$$H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma} = \{f : \|f\|_{H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}} < +\infty\}$$

Като се използва коефициентът (3.5) е дефинирана функцията

$$\begin{aligned} & K_{\alpha, \beta, \gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^s} R(\alpha; \beta; \gamma; b; \mathbf{l}) {}_b\text{wal}_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) \overline{{}_b\text{wal}_{\mathbf{l}}(\mathbf{y})}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0, 1]^s \end{aligned} \quad (3.7)$$

Доказано е следното твърдение:

Твърдение 3.1 *Функцията $K_{\alpha, \beta, \gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, дефинирана чрез равенството (3.7) е пораждащо ядро за Хилбертовото пространство $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$.*

В подпараграф 3.2.2 е представена грешката на интегрирането в разглежданото от нас пространство $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$, чрез използването на произволна мрежа P_N . В сила е следната теорема:

Теорема 3.1 *Нека $\alpha > 1$ е фиксирано реално, $\beta \geq 1$ е фиксирано цяло и γ е вектор от тегла. Нека $P_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ е произволна мрежа, състояща се от N точки в $[0, 1]^s$. Тогава грешката на интегрирането в Хилбертовото пространство $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$, чрез използване на мрежата P_N , удовлетворява равенството*

$$\begin{aligned} & e^2(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}; P_N) \\ &= -1 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(\alpha; \beta; \gamma; b; \mathbf{k}) {}_b\text{wal}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n) \overline{{}_b\text{wal}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_m)}. \end{aligned}$$

3.3 Връзка между тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ – диафония и грешката на интегрирането

$e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}; P_N)$ в пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$

В този параграф е представена грешката $e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}; P_N)$ на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$ в термините на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ – диафония. По-този

начин се представя връзката, която съществува между тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ – диафония и грешката на интегрирането $e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}; P_N)$ в пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$.

В сила е следната теорема:

Теорема 3.2 *Нека $P_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ е произволна мрежа, състояща се от N точки в s –мерния единичен куб $[0, 1]^s$. Грешката $e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}; P_N)$ в най-лошия случай на интегрирането в Хилбертовото пространство $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$ чрез използване на мрежата P_N и тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ – диафония на мрежата P_N са свързани с равенството*

$$e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}; P_N) = \sqrt{C(\alpha; \beta; \gamma; b)} F(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; P_N),$$

където константата $C(\alpha; \beta; \gamma; b)$ се дефинира чрез равенството (2.4) от дисертацията.

3.4 Върху порядъците на грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството

$H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$

В параграф 3.4 са получени порядъците на грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$. Показано е влиянието на параметрите α и β върху порядъка на грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$ чрез използването на (t, m, s) –мрежа.

В подпараграф 3.4.1 са представени някои предварителни понятия и твърдения, които са необходими, за да се изведат основните резултати. В дисертацията са дефинирани понятията елементарен интервал, (t, m, s) –мрежа, обяснено е също така и понятието *truncation* – *срязване* и не на последно място е припомнена и точната стойност на тригонометричната сума на произволна (t, m, s) –мрежа, конструирана от матриците $C_1, \dots, C_s$.

В подпараграф 3.4.2 е представена формулата за грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$, чрез използването на произволна (t, m, s) - мрежа.

Теорема 3.3 Нека $P_{b^m} = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{b^m-1}\}$ е произволна (t, m, s) -мрежа над $\mathbb{Z}_b$, състояща се от b^m точки от $[0, 1)^s$. Нека P_{b^m} е генерирана от матриците $C_1, C_2, \dots, C_s$ и нека да се дефинира множеството

$$\chi = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s : C_1^T \text{tr}_m(k_1) + \dots + C_s^T \text{tr}_m(k_s) = \mathbf{0}\}.$$

Тогава грешката в най-лошия случай на интегрирането в тегловото Хилбертово пространство $H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$, чрез използването на мрежата P_{b^m} удовлетворява равенството

$$e^2(H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}; P_N) = \sum_{\mathbf{k} \in \chi \setminus \{\mathbf{0}\}} R(\alpha; \beta; \gamma; b; \mathbf{k}),$$

където коефициентът $R(\alpha; \beta; \gamma; b; k)$ се дава чрез равенство (2.3) от дисертацията.

В подпараграф 3.4.3 са представени някои предварителни резултати, които са използвани в доказателствата на основните резултати.

В подпараграф 3.4.4 са посочени три теореми, където са представени оценките отгоре на интегрирането в разглажданото от нас Хилбертово пространство $H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$, чрез използването на (t, m, s) -мрежа, конструирана по матричния принцип.

Нека чрез символа $M_{b,m}$ се означат множествата от всички $m \times m$ матрици, с елементи от множеството $\mathbf{Z}_b = \{0, 1, \dots, b-1\}$.

Теорема 3.4 За произволно реално λ , $0 < \lambda \leq 1$ съществува набор от матрици $C'_1, \dots, C'_s \in M_{b,m}$, такива че е в сила неравенството

$$e^{2\lambda}(C'_1, \dots, C'_s) \leq -1 + \prod_{j=1}^s \sum_{l_j=0}^{\infty} \rho^\lambda(\alpha; \beta; \gamma; b^m l_j) \\ + \frac{1}{b^m} \prod_{j=1}^s \sum_{l_j=0}^{\infty} \sum_{k_j=0}^{b^m-1} \rho^\lambda(\alpha; \beta; \gamma; b^m l_j + k_j).$$

Теорема 3.5 Нека $\alpha > 1$ е произволно и фиксирано реално. Нека $\beta = 1$. Нека $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, където $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_s > 0$ е произволен вектор от тегла. Тогава е в сила следното:

(i) (**оценка отгоре**) Нека $\frac{1}{\alpha} < \lambda \leq 1$ е произволно число. Нека $\beta = 1$. Тогава съществува дигитална (t, m, s) -мрежа P_{b^m} над $\mathbf{Z}_b$ такава, че грешката на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$, чрез използването на мрежата P_{b^m} удовлетворява неравенството

$$\begin{aligned} & e^{2\lambda}(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta=1; \gamma}; P_{b^m}) \\ & \leq -1 + \prod_{j=1}^s \left[1 + \gamma_j^\lambda (b-1) \frac{b^{\alpha\lambda}}{b^{\alpha\lambda} - b} b^{-\alpha\lambda m} \right] \\ & \quad + \frac{1}{b^m} \prod_{j=1}^s \left[1 + \gamma_j^\lambda (b-1) \frac{b^{\alpha\lambda}}{b^{\alpha\lambda} - b} \right]. \end{aligned}$$

(ii) (**асимптотично поведение**) За всяко $\alpha > 1$ е в сила включването

$$e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta=1; \gamma}; P_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-\frac{\alpha}{2}m}).$$

(iii) Ако $1 < \alpha < 2$, то съществува число ε , $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, че е в сила включването

$$e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta=1; \gamma}; P_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-(1-\varepsilon)m});$$

(iv) Ако $\alpha = 2$, то е в сила включването

$$e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta=1; \gamma}; P_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-m});$$

(v) Ако $\alpha > 2$, то съществува число $\varepsilon > 0$, че е в сила включването

$$e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta=1; \gamma}; P_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-(1+\varepsilon)m}).$$

Теорема 3.6 Нека $\alpha > 1$ е произволно и фиксирано реално. Нека $\beta = 2$. Нека $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, където $\gamma_1 \geq \gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_s > 0$ е произволен вектор от тегла. Тогава е в сила следното:

(i) (**оценка отгоре**) Нека $\frac{1}{2\alpha} < \lambda \leq 1$ е произволно число. Тогава съществува дигитална (t, m, s) -мрежа P_{b^m} над $\mathbb{Z}_b$ такава, че грешката на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$, чрез използването на мрежата P_{b^m} удовлетворява неравенството

$$\begin{aligned} & e^{2\lambda}(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta=2; \gamma; P_{b^m}}) \\ & \leq -1 + \prod_{j=1}^s \left[1 + \gamma^\lambda(b-1) \frac{b^{\alpha\lambda}}{b^{\alpha\lambda} - 1} b^{-\alpha\lambda m} \right. \\ & \quad \left. + \gamma^\lambda(b-1) \frac{b^{2\alpha\lambda}}{(b^{2\alpha\lambda} - 1)(b^{2\alpha\lambda} - b)} b^{-2\alpha\lambda m} \right] \\ & \quad + \frac{1}{b^m} \prod_{j=1}^s \left[1 + \gamma^\lambda(b-1) \frac{b^{\alpha\lambda}(b^{\alpha\lambda} + b)}{b^{2\alpha\lambda} - b} \right. \\ & \quad \left. + \gamma^\lambda(b-1)^2 \frac{b^{\alpha\lambda}}{(b^{\alpha\lambda} - 1)^2} b^{-\alpha\lambda m} \right. \\ & \quad \left. - \gamma^\lambda(b-1)^2 \frac{b^{2\alpha\lambda}}{(b^{\alpha\lambda} - 1)^2(b^{\alpha\lambda} + 1)} b^{-2\alpha\lambda m} \right]; \end{aligned}$$

(ii) (**асимптотично поведение**) За всяко $\alpha > 1$ е в сила включването

$$e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta=2; \gamma; P_{b^m}}) \in \mathcal{O}(b^{-\frac{\alpha}{2}m}).$$

(iii) Ако $1 < \alpha < 2$, то съществува число ε , $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, че е в сила включването

$$e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta=2; \gamma; P_{b^m}}) \in \mathcal{O}(b^{-(1-\varepsilon)m});$$

(iv) Ако $\alpha = 2$, то е в сила включването

$$e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta=2; \gamma; P_{b^m}}) \in \mathcal{O}(b^{-m});$$

(iii) Ако $\alpha > 2$, то съществува число $\varepsilon > 0$, че е в сила включването

$$e(H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta=2;\gamma}; P_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-(1+\varepsilon)m}).$$

3.5 Заключение

В параграф 3.5 получените резултати от глави две и три на дисертацията са коментирани обстойно.

Както може да се види след коментарите на Теорема 2.6 от втора глава, се показва влиянието на параметъра α върху точните порядъци на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ – диафония на обобщената редица на Ван дер Корпут. А именно в случая когато $\alpha = 2$, се получава порядъкът $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right)$ на разглежданата от нас диафония. А с увеличаване на стойността на параметъра α ($\alpha > 2$), съответно се получава порядъка $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$. Сравнявайки получените два порядъка, се стига до извода, че по-добрият порядък $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ се дължи на факта, че при избора на параметъра $\alpha > 2$, се използват коефициенти $\rho(\alpha; \beta; \gamma; b; k)$, които имат по-бърза скорост на клонене към нула, отколкото скоростта на клонене на коефициентите $\rho(\alpha; \beta; \gamma; b; k)$, която съответства на скоростта $\alpha = 2$.

С това се показва, че точните порядъци на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ – диафония на обобщената редица на Ван дер Корпут зависят от избора на параметъра α . А именно, че те се подобряват в случая когато $\alpha > 2$.

Използването на параметъра β се реализира по следната схема:

В това изследване беше дефинирана една специална функция $K_{\alpha,\beta,\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, която се явява пораждащо ядро за функционално пространство $H_{\mathcal{W}(b);\alpha;\beta;\gamma}$. Дефиницията на тази функция съществено зависи от въведения параметър $\beta \geq 1$. Основна цел е

да се представи грешката на интегрирането $e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta=1; \gamma; \cdot})$ в термините на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ – диафония на мрежата, която е съставена от възлите на интегрирането. По този начин се показва, че тези две характеристики – грешката на интегрирането и диафонията са свързани помежду си. Това е една от изходните позиции, за да се даде видът на дифонията, представена в Дефиниция 2.2. Разгледа се диафонията само от гледна точка на това, тя да бъде мярка за равномерното разпределение на редици. Тази връзка беше представена в параграф 3.2 на дисертацията.

Влиянието на параметъра β върху оценките на грешката на интегрирането $e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma; \cdot})$ във функционалното пространство $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$ е следното: В случая когато $\beta = 1$ оценката отгоре на грешката е валидна за всяко λ такова, че $\frac{1}{\alpha} < \lambda \leq 1$. В случая когато $\beta = 2$ оценката отгоре на грешката е валидна за всяко λ такова, че $\frac{1}{2\alpha} < \lambda \leq 1$.

Що се отнася до порядъците на грешката на интегрирането, те са едни и същи в случаите когато $\beta = 1$ и $\beta = 2$. По този начин β не оказва влияние на порядъка на грешката на интегрирането. Обаче доказателствата на Теорема 3.5 и Теорема 3.6 се основават на използването на леми, представени в параграф 3.4. От хода на доказателствата на тези леми, ясно се вижда, различната техника за тяхното доказване. Тук обаче параметърът β влияя съществено на резултатите на тези леми.

И така параметърът β се използва съществено при дефинирането на функционалното пространство $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$, тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ – диафония и връзката която се показва, че съществува между грешката на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$ и тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ – диафония.

Това бе основният мотив за въвеждане на един нов параметър β , който се използва, за да се дефинира функционалното пространство $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$ и тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ – диафония.

4. ХИБРИДНА ТЕГЛОВА ДИАФОНИЯ

В четвърта глава от дисертацията е представена нова количествена мярка за неравномерността на разпределението на хибридни редици, така наречената хибридна диафония. Нейната дефиниция се основава на използването на функционална система, която е тензорно произведение на тригонометричната система $\mathcal{T}$, Уолш функционалната система над крайни групи $\mathcal{W}_{G_b, \psi_b}$, b -ичната функционална система Γ_b и системата на Виленкин функциите $Vil_{\mathcal{B}_s}$. Като специални случаи от хибридната теглова диафония се получават всички известни видове на диафонията. Показва се също и изчислителната сложност $\mathcal{O}(N^2)$ на хибридната диафония. Конструира се функционалният клас $H_{\mathcal{F}, \alpha, \gamma}^{\text{hybrid}}$, който е хибридно Хилбертово пространство, което се генерира от специални пораждащи ядра и се получава формула за грешката на интегрирането в това пространство. Не на последно място се доказва, че двете характеристики — грешката на интегрирането в хибридното Хилбертово пространство $H_{\mathcal{F}, \alpha, \gamma}^{\text{hybrid}}$ и тегловата хибридна диафония, с точност до мултипликативна константа, са равни помежду си.

4.1 Основни функционални системи

В параграф 4.1. са представени конструкциите на четири функционални системи — тригонометричната система $\mathcal{T}$, Уолш функционалната система над крайни групи $\mathcal{W}_{G_b, \psi_b}$, b -ичната функционална система Γ_b и системата на Виленкин функциите $Vil_{\mathcal{B}_s}$, които са основен инструмент за реализирането на поставените цели.

4.2 Хибридна функционална система

В подпараграф 4.2.1 е въведена и е представена конст-рукцията на хибридната функционална система.

Концепцията на хибридната функционална система се осно-вава на следните детайли: Нека $s \geq 1$ означава фиксирана раз-мерност. Нека да изберем четири числа s_1, s_2, s_3, s_4 такива, че за $\tau = 1, 2, 3, 4$ $0 \leq s_\tau \leq s$ и $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = s$. Числото s_τ ще означава подразмерността в настоящата работа.

Нека $\mathbf{b}^{(2)} = (b_1^{(2)}, \dots, b_{s_2}^{(2)})$ е вектор от цели числа, не неп-ременно всички различни помежду си и нека $b_j^{(2)} \geq 2$. За $j = 1, 2, \dots, s_2$ нека $(G_{b_j^{(2)}}, \oplus_{G_{b_j^{(2)}}})$ е крайната абелева група от ред $b_j^{(2)}$, $\psi_{b_j^{(2)}} : \mathbb{Z}_{b_j^{(2)}} \rightarrow G_{b_j^{(2)}}$ е произволна биекция с условието $\psi_{b_j^{(2)}}(0) = \mathbf{0}$. Нека

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}_{G_{\mathbf{b}^{(2)}}, \psi_{\mathbf{b}^{(2)}}} \\ &= \{G_{\mathbf{b}^{(2)}, \psi_{\mathbf{b}^{(2)}}} \text{wal}_{k^{(2)}}(x) : \mathbf{k}^{(2)} \in \mathbb{N}_0^{s_2}, \mathbf{x} \in [0, 1]^{s_2}\} \end{aligned}$$

е съответната система от Уолш функции над групата $G_{\mathbf{b}^{(2)}}$ по отношение на биекцията $\psi_{\mathbf{b}^{(2)}}$.

Нека $\mathbf{b}^{(3)} = (b_1^{(3)}, \dots, b_{s_3}^{(3)})$ е вектор от цели числа, не неп-ременно всички различни помежду си и нека $b_j^{(3)} \geq 2$. Нека за $j = 1, 2, \dots, s_3$

$$\Gamma_{b_j^{(3)}} = \{\gamma_{k_j^{(3)}}(x) : k_j^{(3)} \in \mathbb{N}_0, x \in [0, 1]\}$$

да бъдат съответните $b_j^{(3)}$ -ични функционални системи.

За произволен вектор $\mathbf{k}^{(3)} = (k_1^{(3)}, \dots, k_{s_3}^{(3)}) \in \mathbb{N}_0^{s_3}$ функционал-ната система $\Gamma_{\mathbf{b}^{(3)}}$ се дефинира като тензорното произведение

$$\Gamma_{\mathbf{b}^{(3)}} = \Gamma_{b_1^{(3)}} \times \dots \times \Gamma_{b_{s_3}^{(3)}}.$$

Нека $\mathcal{B}_{s_4} = (B_1, \dots, B_{s_4})$ е множества от редици от основи. Нека

$$\text{Wil}_{\mathcal{B}_{s_4}} = \{\mathcal{B}_{s_4} \text{Wil}_{\mathbf{k}^{(4)}}(\mathbf{x}) : \mathbf{k}^{(4)} \in \mathbb{N}_0^{s_4}, \mathbf{x} \in [0, 1]^{s_4}\}$$

е функционалната система на Виленкин, която съответства на множеството $\mathcal{B}_{s_4}$.

Дефиниция 4.8 *Хибридната функционална система*

$$\mathcal{F}^{hybrid} = \mathcal{T}^{s_1} \otimes \mathcal{W}_{G_{\mathbf{b}^{(2)}}, \psi_{\mathbf{b}^{(2)}}} \otimes \Gamma_{\mathbf{b}^{(3)}} \otimes \text{Vil}_{\mathcal{B}_{s_4}},$$

или с повече детайли

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{hybrid} = & \underbrace{[\mathcal{T} \otimes \dots \otimes \mathcal{T}]_{s_1 - \text{ пъти}}} \otimes [\mathcal{W}_{G_{b_1^{(2)}}, \psi_{b_1^{(2)}}} \otimes \dots \otimes \mathcal{W}_{G_{b_{s_2}^{(2)}}, \psi_{b_{s_2}^{(2)}}}] \\ & \otimes [\Gamma_{b_1^{(3)}} \otimes \dots \otimes \Gamma_{b_{s_3}^{(3)}}] \otimes [\text{Vil}_{B_1} \otimes \dots \otimes \text{Vil}_{B_{s_4}}] \end{aligned}$$

се дефинира като тензорно произведение на тригонометрични функционална системата $\mathcal{T}^{s_1}$ от размерност s_1 , Уолш функционалната система $\mathcal{W}_{G_{b_j^{(2)}}, \psi_{b_j^{(2)}}}$, $1 \leq j \leq s_2$, $b_j^{(3)}$ -ичната функционална система $\Gamma_{b_j^{(3)}}$, $1 \leq j \leq s_3$ и функционалната ситемата на Виленкин $\text{Vil}_{\mathcal{B}_j}$, $1 \leq j \leq s_4$.

Дефинирана е хибридната функционална система

$$\mathcal{F}^{hybrid} = \{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{s_1} \times \mathbb{N}_0^{s_2+s_3+s_4}, \mathbf{x} \in [0, 1)^s\}.$$

В подпараграф 4.2.2 е представена следната теорема:

Теорема 4.1 *Функционалната система*

$$\mathcal{F}^{hybrid} = \{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s, \mathbf{x} \in [0, 1)^s\}.$$

е пълна ортонормирана функционална система над пространството $L_2([0, 1)^s)$.

В подпараграф 4.2.3 са представени предварителни резултати, чрез които се доказва Теорема 4.1., чието доказателство е представено в подпараграф 4.2.4.

В подпараграф 4.2.5 е представен аналог на критерия на Вайл в термините на функциите от хибридната система.

Теорема 4.2 (Хибриден аналог на критерия на Вайл)
Редицата $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ от точки в $[0, 1]^s$ е равномерно разпределена, тогава и само тогава, когато граничното равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n) = 0$$

е изпълнено за всеки вектор $\mathbf{k} \neq 0$.

4.3 Обзор на известни типове диафонии

В параграф 4.3 са дефинирани всички известни до сега типове диафонии, като класическата диафония, диадичната диафония, b -ичната диафония, обобщената b -ична диафония, общата диафония, тегловата b -ична диафония, тегловата диафония, тегловата p -ичната диафония и хибридната диафония.

4.4 Постановка на задачата

В параграф 4.4 от дисертацията са поставени за решаване следните задачи:

Задача 4.1 Да се предложи дефиниция на хибридната версия на тегловата диафония $F_N^{\text{hybrid}}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$, която да се основава на използването на специални коефициенти и Хибридната функционална система $\mathcal{F}$.

Задача 4.2 Да се докаже, че така дефинираната хибридна теглова диафония $F_N^{\text{hybrid}}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$ е количествена мярка за равномерно разпределение на хибридни редици.

Задача 4.3 Да се покаже изчислителната сложност на тегловата хибридна диафония $F_N^{\text{hybrid}}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$.

Задача 4.4 Да се дефинира теглово Коробово пространство $H_{\mathcal{F}, \alpha, \gamma}^{\text{hybrid}}$, чиято дефиниция се основа на използването на специални коефициенти и хибридната функционална система $\mathcal{F}$.

Задача 4.5 Да се изведе формула за грешката на интегрирането $e(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; P_N)$ в пространството $H_{\mathcal{F}, \alpha, \gamma}^{\text{hybrid}}$ в термините на функциите от функционалната хибридна система $\mathcal{F}$.

Задача 4.6 Да се намери връзката, която съществува между грешката на интегрирането $e(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; P_N)$

в пространството $H_{\mathcal{F}, \alpha, \gamma}^{hybrid}$ и хибридна теглова диафония $F_N^{hybrid}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; P_N)$ на мрежата от точки P_N , които се използват като възли на интегрирането.

4.5 Хибридна теглова диафония

$$F_N^{hybrid}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$$

В този параграф е въведена версия на тегловата хибридна диафония.

В подпараграф 4.5.1 е представена кратка теоретична постановка на параметрите и са дефинирани някои теоретико-числови лемми.

В подпараграф 4.5.2 е дефинирана тегловата хибридна диафония.

Дефиниция 4.13 Нека $\mathbf{b}$, α и γ са дадени вектори от основи, параметри и тегла, дефинирани по-горе в настоящето изложение. Нека $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ е произволна редица от точки в $[0, 1]^s$. Тогава за всяко цяло $N \geq 1$ хибридна теглова диафония на първите N елемента на редицата ξ се дефинира като

$$F_N^{hybrid}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi) = \left(\frac{1}{C(\alpha; \gamma; \mathbf{b}^{(2)}; \mathbf{b}^{(3)}; \mathcal{B}_{s_4})} \times \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{s_1} \times \mathbb{N}_0^{s_2+s_3+s_4} \setminus \{\mathbf{0}\}} R(\alpha; \gamma; \mathbf{b}^{(2)}; \mathbf{b}^{(3)}; \mathcal{B}_{s_4}; \mathbf{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

където коефициентът $R(\alpha; \gamma; \mathbf{b}^{(2)}; \mathbf{b}^{(3)}; \mathcal{B}_{s_4}; \mathbf{k})$ се дефинира чрез равенство (4.27) от дисертацията, а константата $C(\alpha; \gamma; \mathbf{b}^{(2)}; \mathbf{b}^{(3)}; \mathcal{B}_{s_4})$ се дефинира чрез равенство (4.32) от дисертацията.

В теорема 4.3 е показано, че хибридна теглова диафония $F_N^{hybrid}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$ е мярка за неравномерността на разпределение на хибридни редици.

Теорема 4.3 Редицата ξ е равномерно разпределена в $[0, 1]^s$

тогава и само тогава, когато граничното равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N^{hybrid}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi) = 0$$

е вярно за дефинираните вектори $\mathbf{b}$, α и γ .

След като се направи специален избор на функционалната система и параметрите $\mathbf{b}$, α и γ от Дефиниция 4.9, като специални случаи, се получават следните типове диафонии:

1. Нека $s \geq 1$ е фиксирана размерност, $s = s_1 + s_2 + s_3$, където $s_\tau \in \mathbb{N}_0$ и $s_4 = 0$. Използва се тригонометричната система $\mathcal{T}^{s_1}$ в размерността s_1 , Уолш функционалната система в размерността s_2 и b -ичната функционална система $\Gamma_{\mathbf{b}}$ в размерност s_3 . Хибридната функционална система е тензорно произведение на горните системи. Избират се параметрите $\alpha = (2, \dots, 2)$ и $\gamma = (1, \dots, 1)$. Тогава, получената диафония $F_N^{hybrid}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$ е точно хибридната диафония, въведена от Хелекалек [Хе 3].

2. Нека $s \geq 1$ е фиксирана размерност, $s_3 = s$ и $s_1 = s_2 = s_4 = 0$. Нека $\mathbf{b} = \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_s)$ е вектор от s не непременно всички различни помежду си прости числа. Използва се $\mathbf{p}$ -ичната функционална система $\Gamma_{\mathbf{p}}$ в размерността s_3 . Избират се параметрите $\alpha = (2, \dots, 2)$ и $\gamma = (1, \dots, 1)$. Тогава, получената диафония $F_N(\Gamma_{\mathbf{p}}; \mathbf{p}; \alpha; \gamma; \xi)$ е точно $\mathbf{p}$ -ичната диафония, представена от Хелекалек [Хе 2].

3. Нека $s \geq 1$ е фиксирана размерност, $s_1 = s$ и $s_2 = s_3 = s_4 = 0$. Използва се тригонометричната система $\mathcal{T}^s$ от размерност s . Параметрите α и γ са произволни, но подчинени на въведените условия. Тогава, получената диафония $F_N(\mathcal{T}^s; \alpha; \gamma; \xi)$ е точно диафонията, въведената от Ристовска и Грозданов [Гр Рис 1]. Ако се изберат параметрите $\alpha = (2, \dots, 2)$ и $\gamma = (1, \dots, 1)$, тогава получената диафония $F_N(\mathcal{T}^s; \alpha; \gamma; \xi)$ е точно класическата диафония, представена от Цинтерхоф [Цин 1].

4. Нека $s \geq 1$ е фиксирана размерност, $s_2 = s$ и $s_1 = s_3 = s_4 = 0$. Нека $\mathbf{b} = (b, \dots, b)$ е вектор с фиксирана основа $b \geq 2$, $G_{\mathbf{b}} = (G_b, \dots, G_b)$ и $\psi_{\mathbf{b}} = (\psi_b, \dots, \psi_b)$. Използва се Уолш Функционалната система над крайни групи $G_{\mathbf{b}}$ по отношение на биекци-

ята ψ_b . Избират се параметрите $\alpha = (2, \dots, 2)$ и $\gamma = (1, \dots, 1)$. Тогава, получената диафония $F_N(Wal_{G_b, \psi_b}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$ е точно обобщената b -ична диафония, дефинирана от Грозданов, Николава и Стоилова [Гр Ник Ст].

5. Ако системата W_{G_b, ψ_b} се замени със системата $W_{\mathbf{Z}_b, id_b} = W(b)$ от функциите на Уолш при основа $b \geq 2$. И се избират параметрите $\alpha = (2, \dots, 2)$ и $\gamma = (1, \dots, 1)$. Тогава, получената диафония $F_N(W(b); \alpha; \gamma; \xi)$ е точно b -ичната диафония, въведена от Грозданав и Стоилова [ГрСт 1]. Накрая, ако се положи $b = 2$, тогава получената диафония $F_N(W(2); \alpha; \gamma; \xi)$ е точно диадичната диафония, дефинирана от Хелекалек и Лийб [Хе Ли 1].

4.6 Изчислителната сложност на хибридна теглова диафония

В параграф 4.6 е показана изчислителната сложност на хибридна теглова диафония.

В подпараграф 4.3.1 от дисертацията са представени редица предварителни резултати, необходими за доказването на основния резултат на този параграф. В подпараграф 4.6.2 е доказана следната теорема: Доказана е следната теорема:

Теорема 4.4 *Нека $P_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ е произволна мрежа, състояща се от N точки в $[0, 1]^s$. За $0 \leq n \leq N - 1$ точките на мрежата P_N ще се представят във вида $\mathbf{x}_n = (\mathbf{x}_n^{(1)}, \mathbf{x}_n^{(2)}, \mathbf{x}_n^{(3)}, \mathbf{x}_n^{(4)})$, където за $1 \leq \tau \leq 4$ $\mathbf{x}_n^{(\tau)} = (x_{n,1}^{(\tau)}, x_{n,2}^{(\tau)}, \dots, x_{n,s_\tau}^{(\tau)})$. Нека за $2 \leq \tau \leq 4$ координатите на векторите $\mathbf{x}_n^{(\tau)}$ удовлетворяват условията $(C1_\tau)$ или $(C2_\tau)$ в частен случай, всички координати на точките $\mathbf{x}_n$ са рационални числа. Тогава хибридна теглова диафония на мрежата P_N удовлетворява равенството*

$$(F^{\text{hybrid}}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; P_N))^2 = C^{-2}(\alpha; \gamma; \mathbf{b}^{(2)}; \mathbf{b}^{(3)}; \mathcal{B}_{s_4})$$

$$\times \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \Psi(\mathbf{b}; \alpha; \gamma; \mathbf{x}_n \ominus_{\text{hybrid}}^{[0,1]^s} \mathbf{x}_m),$$

където функцията $\Psi(\mathbf{b}; \alpha; \gamma; \mathbf{x})$ е дефинирана в Лема 4.11, а величината $C(\alpha; \gamma; \mathbf{b}^{(2)}; \mathbf{b}^{(3)}; \mathcal{B}_{s_4})$ е дефинирана чрез равенството (4.32) от дисертацията.

Теорема 4.4 показва, че изчислителната сложност на хибридна диафония е $\mathcal{O}(N^2)$.

4.7 Върху грешката на интегрирането в хибридно теглово пространство $H_{\mathcal{F}, \alpha, \gamma}^{\text{hybrid}}$

В параграф 4.7 е изведена грешката на интегрирането в хибридно теглово пространство $H_{\mathcal{F}, \alpha, \gamma}^{\text{hybrid}}$.

В подпараграф 4.7.1 е представена кратка теоретична постановка за Хилбертовите пространства, които се генерират от пораждащи ядра.

В подпараграф 4.7.2 s -мерното Хилбертовото пространство $H_{\mathcal{F}, \mathbf{b}, \alpha, \gamma}^{\text{hybrid}}$, което се основава на хибридна система $\mathcal{F}^{\text{hybrid}}$ и параметрите $\mathbf{b}^{(2)}$, $\mathbf{b}^{(3)}$, $\mathcal{B}_{s_4}$, α , γ , се дефинира като тензорно произведение на съответните подразмерни Хилбертови пространства, както следва

$$H_{\mathcal{F}, \mathbf{b}, \alpha, \gamma}^{\text{hybrid}} = H_{\mathcal{T}^{s_1}, \alpha^{(1)}, \gamma^{(1)}} \otimes H_{G_{\mathbf{b}^{(2)}}, \psi_{\mathbf{b}^{(2)}}, \alpha^{(2)}, \gamma^{(2)}} \otimes H_{\Gamma_{\mathbf{b}^{(3)}}, \alpha^{(3)}, \gamma^{(3)}} \otimes H_{\text{Vil}_{\mathcal{B}_{s_4}}, \alpha^{(4)}, \gamma^{(4)}}.$$

Пораждащото ядро на пространството $H_{\mathcal{F}, \mathbf{b}, \alpha, \gamma}^{\text{hybrid}}$ се дава чрез формулата

$$K_{\mathcal{F}, \mathbf{b}, \alpha, \gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{s_1} \times \mathbb{N}_0^{s_2 + s_3 + s_4}} R(\alpha; \gamma; \mathbf{b}^{(2)}; \mathbf{b}^{(3)}; \mathcal{B}_{s_4}; \mathbf{k}) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \overline{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0, 1]^s.$$

В подпараграф 4.7.3 е представена формулата за грешката на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{F}, \mathbf{b}, \alpha, \gamma}^{\text{hybrid}}$.

Теорема 4.5 Нека векторът $\mathbf{b}$ от основи, векторите α от параметри и γ от тегла са дефинирани по-горе в работа. Нека $P_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ е произволна мрежа от N точки

в $[0, 1]^s$. Тогава грешката на интегрирането в Хилбертовото пространство $H_{\mathcal{F},\mathbf{b},\alpha,\gamma}^{\text{hybrid}}$ удовлетворява равенството

$$e^2(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; P_N) = -1 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{s_1} \times \mathbb{N}^{s_2+s_3+s_4}} \times R(\alpha; \gamma; \mathbf{b}^{(2)}; \mathbf{b}^{(3)}; \mathcal{B}_{s_4}; \mathbf{k}) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n) \cdot \overline{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_m)}.$$

В подпараграф 4.7.4 е дадена връзката между грешката на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{F},\mathbf{b},\alpha,\gamma}^{\text{hybrid}}$ и хибридната теглова диафония $F_N^{\text{hybrid}}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$.

Теорема 4.6 Нека $P_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ е произволна мрежа, състояща се от $N \geq 1$ точки в $[0, 1]^s$. Грешката $e(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; P_N)$ на интегрирането в Хилбертовото пространство $H_{\mathcal{F},\mathbf{b},\alpha,\gamma}^{\text{hybrid}}$ основаща се на използването на мрежата P_N и хибридната теглова диафония $F^{\text{hybrid}}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; P_N)$ на мрежата P_N са свързани с равенството

$$e(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; P_N) = \sqrt{C(\alpha; \gamma; \mathbf{b}^{(2)}; \mathbf{b}^{(3)}; \mathcal{B}_{s_4}) F^{\text{hybrid}}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; P_N)},$$

където константата $C(\alpha; \gamma; \mathbf{b}^{(2)}; \mathbf{b}^{(3)}; \mathcal{B}_{s_4})$ се дефинира с равенство (4.32) от дисертацията.

В подпараграф 4.7.5 е дадено заключение, в което са коментирани резултатите получени в тази глава. Тези коментори са: В четвърта глава от дисертацията се въведе нова версия на тегловата хибридна диафония $F_N^{\text{hybrid}}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$.

Също така са представени нови идеи и компоненти в сравнение с резултати, получени от други автори. А именно въвежда се нова, четвърта функционална система, тъй наречената функционална система на Виленкин. Оригиначните Уолш функции,

които са използвани от други автори, са заменени с много по-обща функционална система на Уолш функциите над крайни групи.

Коефициентите, които са използвани в тази глава от дисертация се състоят от следните елементи: тегла γ_j , които са положителни и не растат, т.е. изпълняват условието $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_s > 0$. Параметрите $\alpha_j > 1$, които определят скоростта на сходимост към нула на коефициентите, участващи в дефиницията на тегловата хибридна диафония $F_N^{hybrid}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$.

Тези коефициенти $R_\tau(\alpha; \gamma; k)$, $1 \leq \tau \leq 4$ се използват в дефиницията на тегловата хибридна диафония. Те са равни на коефициентите, които се използват за дефиниране на специални функции, които се явяват пораждащи ядра на Хилбертови пространства от съответните подразмерности. Тогава, хибридно хилбертово пространство от размерност s се явява тензорно произведение на съответните хилбертови пространства от по-малки размерности.

Показва се, че тези две характеристики от принципно различна природа, каквито са тегловата хибридна диафония и грешката на интегрирането, с точност до мултипликативна константа са равни помежду си.

По този начин се дава отговор на въпроса: какво представлява тегловата хибридна диафония? Отговорът естествено е, че тя е грешка в най-лошия случай на интегрирането в специално хибридно Хилбертово пространство.

В тази работа паралелно се извършват, пресмятания свързани с изследването на грешката и тегловата хибридна диафония. Използвани са общи идеи, които се прилагаха и в двата типа изследвания — на грешката в най-лошия случай на интегрирането и на тегловата хибридна диафония.

Общият подход, свързан с избора на функционални системи и типа на коефициентите, участващи в дефиницията на тегловата хибридна диафония, позволяват като частен случай да се получат на практика всички до сега известни типове диафонии.

Решен е проблемът с изчислителната сложност $\mathcal{O}(N^2)$ на

тегловата хибридна диафония. Доказването на този резултат се обуславя с извършването на сложни изчисления, свързани с фуриеровия анализ на специална пораждаща функция. Това на практика ни дава възможност да се даде една еквивалентна дефиниция на тегловата хибридна диафония, представена като двойна сума, а не като сходящ безкраен ред. Този резултат е удобна форма за създаване на математически компютърен модел за изследване на тегловата хибридна диафония. Това, разбира се, се отнася и за създаване на такъв модел и на грешката в най-лошия случай на интегриране в пространството $H_{\mathcal{F},\alpha,\gamma}^{hybrid}$.

Като заключение се споменава фактът, че в тази глава от дисертацията, идеи свързани с диафонията и грешката взаимно си влияеха, за да се стигне до теоретичните и практични резултати, представени в настоящия труд.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тук е направен кратък обзор на резултатите, получени в дисертацията. Дефинирани са специални функционални пространства и е използван квази-Монте Карло алгоритъма за приближено пресмятане на многомерни интеграли от функциите от тези класове.

Получени са точни формули за грешката на интегрирането в дефинираните пространства. Тези формули бяха мотивацията да се дефинират диафонии от специален вид. Тези характеристики са използвани в дисертацията за две основни цели. Първо, като количествена мярка за равномерността на разпределението на редици. Второ, показани са връзките, които съществуват между грешката на интегрирането в дефинираните пространства и диафонията на мрежата, съставена от възлите на интегрирането.

Дисертацията е структурирана в увод, четири глави, заключение и цитирана литература.

Уводът съдържа описание на структурата на дисертацията, като основните акценти падат на съдържанието на трите глави с резултати.

В първа глава бяха дадени известни понятия и твърдения от теорията на равномерно разпределените редици и квази-Монте Карло интегрирането в различни функционални класове.

Основните резултати на работата бяха изложени в следващите три глави, а именно:

Във втора глава се представи нова версия на b -ичната диафония — тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ — диафония. Показа се, че тя е количествена мярка за неравномерността на разпреде-

нието. Намери се изчислителната сложност на разглежданата характеристика. Показаха се точните порядъци на тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафония на обобщената редица на Ван дер Корпут.

В трета глава се въведе тегловото Хилбертово пространство $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$. Изведе се точна формула за грешката на интегрирането в това пространство, чрез използване на квази-Монте Карло алгоритъма. Показа се един от основните проблеми залегнали в дисертацията – връзката между $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ –диафонията и грешката $e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}; P_N)$ на интегрирането в това пространство. Получени са порядъците на грешката на интегрирането $e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}; P_{b^m})$ в дефинираното пространство $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$, чрез използването на конкретна (t, m, s) –мрежа.

В последната глава също е представена нова количествена мярка за неравномерността на разпределението на хибридни редици, така наречената хибридна диафония. Нейната дефиниция се основава на използването на функционална система, която е тензорно произведение на тригонометричната система $\mathcal{T}$, Уолш функционалната система над крайни групи $\mathcal{W}_{G_b, \psi_b}$, b –ичната функционална система Γ_b и системата на Вилекин функциите $Wil_{\mathcal{B}_s}$. Като специални случаи от хибридната теглова диафония се получават всички известни видове на диафонията. Показва се също и изчислителната сложност $\mathcal{O}(N^2)$ на хибридната диафония. Конструира се функционалният клас $H_{\mathcal{F}, \alpha, \gamma}^{\text{hybrid}}$, който е хибридно Хилбертово пространство, което се генерира от специални пораждащи ядра и се получава формула за грешката на интегрирането в това пространство. Не на последно място се доказва, че двете характеристики – грешката на интегрирането в хибридното Хилбертово пространство $H_{\mathcal{F}, \alpha, \gamma}^{\text{hybrid}}$ и тегловата хибридна диафония, с точност до мултипликативна константа, са равни помежду си.

6. ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА

[Ар 1] Aronszajan, N.: Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337-404.

[ГрСт 1] Grozdanov, V. S. - Stoilova, S.S.: *On the theory of b-adic diaphony*, Comp. Rendys Akad. Bulgare Sci. 54 (3) (2001), 31-34.

[ГрСт 2] Grozdanov, V.S., Stoilova, S.: *The b-adic diaphony*, Rendiconti di Matematica, Serie VII **22** (2002), 203-221.

[Гр Ник Ст] Grozdanov, V., Nikolova, V., Stoilova, S., **Generalized b-adic diaphony**, Comp.Rendus AKAD. Bulgare Sci., **56**, (2003), no.4, 23-30.

[Гр Рис 1] Grozdanov, V., Ristovska, V., *The weighted diaphony*, Comp. Ren. Sci. Bulgare, **59**, 2, 2006, 137-142.

[Гр 1] Grozdanov, V.: *The weighted b-adic diaphony*, J. Complexity, **22**(2006), 490-513,doi:10.1016/j.jco.2005.11.008.

[Нид 1] Niederreiter, H.: Point sets and sequences with small discrepancy, Monatsh. Math. 104 (1987) 273-337.

[Нид 2] Niederreiter, H.: Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, CBMS-NSF Series in Applied Mathematics, vol. 63, SIAM, Philadelphia, 1992.

[Со 1] Sobol, I. M. *Distribution of points in a cube and approximate evaluation of integrals*, Z. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz., **7**, (1967), pp. 784-802.

[Фо 2] H. Faure, *Discrépance de suites associées à un système de numération Cen dimension s*, Acta Arith. **41**, 1982, 337-351.

[Хе Ли 1] Hellekalek, P. - Leeb, H.: *Dyadic diaphony*, Acta Arith.,

80 (1997), 187-196.

[Xe 2] P. Hellekalek, A notion of diaphony based on p -adic arithmetic, *Acta Arith.* **140** (2010), 273 - 284.

[Xe 3] P. Hellekalek, Hybrid function system in the theory of uniform distribution of sequences, in: *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods*, 2010, Springer, Berlin, 2012.

[Цин 1] Zinterhof, P.: *Über einige Abschätzungen bei der Approximation von Funktionen mit Gleichverteilungsmethoden*, S.B. Akad. Wiss., math.-naturw. Klasse, Abt. II **185** (1976), 121-132.

6.1 Приноси на автора

1. Въведена е нова версия на b -ичната диафония, тъй наречената $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ -диафония. Дефиницията на тази b -ичната диафония се основава на използването на три параметъра. Намерена е изчислителната сложност на този тип диафония. Получени са точните порядъци на $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ -диафонията, в зависимост от участващите в дефиницията на тази диафония параметри α и β .

2. Въведено е тегловото Хилбертовото пространство $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$, което е генерирано от специално пораждащо ядро. Получена е точна формула за грешката $e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}; P_N)$ на интегрирането в това пространство, чрез използване на произволна s -мерна мрежа P_N . Показана е връзката, която съществува между грешката на интегрирането $e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}; P_N)$ във въведеното $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$ пространство и тегловата $(\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma)$ -диафония на мрежата P_N , която е съставена от възли на интегрирането.

3. Получени са порядъците на грешката $e(H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}; P_{b^m})$ на интегрирането на функции от пространство $H_{\mathcal{W}(b); \alpha; \beta; \gamma}$, чрез използването на (t, m, s) -мрежа.

4. Въведена е хибридната теглова диафония $F_N^{hybrid}(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$, като мярка за изследване на неравномерността на класове от хибридни редици. Показана е изчислителната сложност на Хибридната теглова диафония $F_N^{hybrid}(\mathcal{F}^{hybrid}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; \xi)$ на произволна мрежа, съставена от N точки в $[0, 1]^s$. Показана е изчислителната ѝ сложност. Изведена е формула за грешката на интегрирането $e(\mathcal{F}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; P_N)$ в пространството $H_{\mathcal{F}^{hybrid}, \alpha, \gamma}$ в термините на функциите от функционалната хибридна система $\mathcal{F}$.

5. Въведено е тегловото Хилбертово пространство $H_{\mathcal{F}^{hybrid}, \mathbf{b}, \alpha, \gamma}$, което е генерирано от специално пораждащо ядро. Получена е формула за грешката $e(\mathcal{F}^{hybrid}; \mathbf{b}; \alpha; \gamma; P_N)$ на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{F}^{hybrid}, \alpha, \gamma}$, чрез използване на произволна хибридна мрежа от точки в $[0, 1]^s$.

6. Двете характеристики - хибридната теглова диафония и

грешката на интегрирането в пространството $H_{\mathcal{F}^{hybrid}, \mathbf{b}, \alpha, \gamma}$ са свързани помежду си. По този начин е изведена и природата на самата хибридна теглова диафония.

6.2 Статии на автора по темата на дисертацията

1.) S. Baycheva, Multivariable Integration in the Hilbert space, Proceeding of the Sixth International Scientific Conference - FMN2015, Volume 1, 74-79

2.) Байчева, С., Грозданов, В., Генезис и развитие на теорията на равномерното разпределение. В сп.: Математика и информатика, 5/2015, София: Аз Буки. 539-548

3.) Baicheva, S., Grozdanov, V., Multivariate integration in weighted Sobolev spaces, - in Mathematics Macedonia vol. 6/2008, pp. 29-37

4.) Baycheva, V. Grozdanov, The hybrid weighted diaphony, Comp. Rendus Akad. Bulgare Sci., 68, (4) (2015), 437-448

6.3 Декларация за оригиналност

Декларирам, че настоящата дисертация съдържа оригинални резултати, получени при проведени от мен научни изчисления (под ръководството на моя научен ръководител). Резултатите, които са получени, описани и/или публикувани от други учени, са надлежно и подробно описани в раздел "*Цитирана Литература*".

Настоящата дисертация не е използвана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Подпис:
/С. Байчева/