

РЕЦЕНЗИЯ

на дисертационен труд на тема

„Количествени мерки за разпределението на хибридни редици и мрежи и тяхното приложение в квази – Монте Карло интегрирането“

с автор **Силвия Георгиева Байчева**

за присъждане на образователна и научна степен **„Доктор“**

научно направление 4. Природни науки, математика и информатика, научна специалност 4.5 математика

Общо представяне на дисертацията:

Представеният дисертационен труд е в обем от 221 страници. Дисертацията се състои от увод, четири глави, в които са представени резултатите на докторантката, заключение и цитирана литература.

В дисертационният труд се представят научни резултати, основно от две научни области – количествената теория на равномерно разпределените редици и теорията на квази-Монте Карло интегрирането в Хилбертови пространства. На резултатите от теорията на равномерно разпределените редици, свързани с изследване на някои версии на b -ичната диафония, е показано директно приложение в теорията и практиката на интегрирането в Хилбертови пространства от типа на Коробов.

Актуалност на разглежданите в дисертационния труд научни проблеми:

В дисертационният труд са разгледани актуални научни проблеми от количествената теория на равномерно разпределените редици, свързани с изследвания на нов тип на b -ичната диафония, както и нова хибридна версия на диафонията. Показани са и приложение на получените резултати, свързани с диафонията в теорията и практиката на квази-Монте Карло интегрирането в Хилбертови пространства, които се генерират от специални функции, наречени пораждащи ядра.

Съдържание на дисертацията:

В увода на дисертационният труд е представено съдържанието на останалите глави на дисертацията.

В първа глава са въведени някои понятия и твърдения, необходими за по-нататъшното успешно получаване на резултатите от останалите глави на дисертацията. Тъй като за доказване на основните резултати на дисертацията съществено се използват класове от ортонормирани функционални системи, то те са представени именно тук в първа глава. Дадени са дефинициите и основните свойства на Уолш функциите, Уолш функциите над крайни групи, функционалната система на Виленкин или т. н. мултипликативна система. Те са основният инструмент, който е използван за

доказване на основните резултати. Необходимото внимание е отделено на представяне на някои понятия и твърдения от теорията на равномерно разпределените редици и теорията на квази – Монте Карло интегрирането. Най – напред са дадени кратки исторически сведения на началните идеи на теорията на равномерно разпределените редици, особено възгледите на Оресме. Дефинирано е понятието за равномерно разпределена редица, което е основно за дисертацията. От гледна точка на качествената теория, са припомнени интегралния и експоненциалния критерии на Вайл. Някои добре известни класове от равномерно разпределени редици, каквито са обобщената редица на Ван дер Корпут, (t,m,s) -мрежите и (t,s) -редиците са дефинирани и са показани някои техни свойства. От гледна точка на количествената теория на равномерно разпределените редици, са показани дефинициите на екстремалния дискрепанс, "звезда" дискрепанса и диафонията. Изяснен е смисълът които се влага, че те са числови мерки за неравномерността на разпределението на редица. В последния параграф на тази глава са представени идеите на численото интегриране в Хилбертови пространства.

Във втора глава на дисертацията докторантката дефинира един нов тип на b – ичната диафония, тъй наречената $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафония. Това е направено в Дефиниция 2.2. В дефиницията на този нов тип b – ична диафония са въведени три параметъра. Първият от тях, който е наречен експоненциален параметър, показва скоростта на клонене към нула на коефициентите, участващи в дефиницията на диафонията. Вторият параметър дава броят на ненулевите разряди на коефициентите, които участват в дефиницията на диафонията. Изборът на този втори параметър е в тясна връзка на начина на дефиниране на функциите на Уолш – дефиниция по групи, свързана със степените на основата b . Третият параметър са координатните тегла и е свързан с прякото приложение на този тип диафония в квази-Монте Карло интегрирането. Смятам, че в дисертацията е представена успешна мотивацията за този избор на параметрите, от които да зависи дефиницията на диафонията. В Теорема 2.1 е показан факта, че $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията е количествена мярка за равномерността на разпределението на редици. В Теорема 2.2 е показана изчислителната сложност, а именно $O(N^2)$ на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията. Основните резултати в тази глава са намерените точни порядъци на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията на обобщената редица на Ван дер Корпут. Тези резултати са получени чрез представяне на общи оценки отгоре на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията на обобщената редица на Ван дер Корпут. Това е показано в Теореме 2.3 и 2.4. Те се отнасят за различни стойности на параметъра β . Чрез оценките отдолу на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията на обобщената редица на Ван дер Корпут, представени в Теореме 2.5 и 2.6, е показана точността на порядъците, получени чрез оценките отгоре на диафонията. Съществен момент в тези резултати е факта, че е показано влиянието на експоненциалния параметър α върху подобрявана на порядъка на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията на обобщената редица на Ван дер Корпут.

В трета глава на дисертацията докторантката се въвежда функционалния клас $H_{W(b);\alpha;\beta;\gamma}$. В дефинирането на този функционален клас съвсем тенденциозно са използвани коефициентите, които в предната глава бяха използвани за дефинирането

на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията. В Лема 3.1 е даден видът на пораждащото ядро за този функционален клас. Основният резултат на тази глава е Теорема 3.1. В нея е представена точна формула за грешката в най – лошия случай на интегрирането в пространство $H_{W(b);\alpha;\beta;\gamma}$ в термините на Уолш функциите. В Теорема 3.2 е показано, че грешката в най – лошия случай на интегрирането в пространството $H_{W(b);\alpha;\beta;\gamma}$ и $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията на мрежата, съставена от възлите на интегрирането, с точност до мултипликативна константа, са равни помежду си. Този резултат е още една допълнителна мотивация за конкретното дефиниране на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията. На този нов тип диафония вече се гледа като на грешката в най – лошия случай на интегрирането в някое конкретно Хилбертово пространство. В Теорема 3.5 и 3.6 са намерени порядъците на интегрирането в пространството $H_{W(b);\alpha;\beta;\gamma}$ чрез използването на някоя (t,m,s) -мрежа. Получените резултати са от типа „съществуване на конкретна мрежа, за която се получава съответния порядък на грешката“. Показано влиянието на експоненциалния параметър α и параметъра β върху порядъците на грешката и стойността на константата в тези порядъци на интегрирането в разглежданото пространство.

В глава четвърта на дисертацията е дефинирана нова хибридна версия на диафонията. Тази хибридна версия на диафонията е предназначена за изследване качеството на разпределението на хибридни редици и мрежи. Изследванията на хибридните редици и мрежи е едно модерно направление в теорията и приложението на равномерно разпределените редици. Хибридните редици и мрежи са обекти конструирани по следния начин: Отделните координати на точките от този тип редици или мрежи се състоят от подкоординати. По всяка група от подкоординатите могат да се избират точки, конструирани по различен начин. На практика, чрез използването на хибридните мрежи в теорията на численото интегриране се реализират предимствата на Монте Карло и квази-Монте Карло интегрирането. Отделните подкоординати на хибридните редици и мрежи е удобно да се изследват с конкретни функционални системи. В този смисъл в дисертацията са използвани тригонометричната функционална система, системата на Уолш функциите над крайни групи, b – ичната функционална система и мултипликативната система. В дефиниция 4.8 е дефинирана конкретна версия на хибридна функционална система. Тази система е дефинирана като тензорно произведение на споменатите по-горе четири основни функционални системи. В Теорема 4.1 е показано, че въведената хибридна функционална система е пълна ортонормирана функционална система над пространството $L_2([0,1]^s)$. Тази теорема има принципно важен характер, за да се развие теорията на хибридната теглова диафония. В Теорема 4.2 е показан хибридният аналог на критерия на Вайл. Тази теорема има помощен характер и е използвана след това за да се докаже Теорема 4.3. Самата хибридна теглова диафония е дефинирана в Дефиниция 4.13. Като частни случаи от дефиницията на хибридна теглова диафония се получават на практика всички известни до сега типове диафонии, което в дисертацията е подробно обяснено. В Теорема 4.3 е показано, че хибридната теглова диафония е количествена мярка за неравномерността на разпределението на хибридни редици. В Теорема 4.4 е показана изчислителната сложност $O(N^2)$ на хибридната теглова диафония. Доказателството на

тази теорема е свързано с извършване на сложни пресмятания. В параграф 4.7 на дисертацията е дефинирано хибридно Хилбертово пространство $H_{F,b, \alpha, \gamma}$. Чрез формулата (4.58) е показан видът на пораждащото ядро за пространството $H_{F,b, \alpha, \gamma}$. В Теорема 4.5 е показана формулата за грешката в най – лошия случай на интегрирането в пространството $H_{F, \alpha, \gamma}$, чрез използвана на произволна мрежа. В Теорема 4.6 е показано, че грешката в най – лошия случай на интегрирането в пространството $H_{F,b, \alpha, \gamma}$ и хибридна теглова диафония с точност до мултипликативна константа, са равни помежду си.

Изводи:

1. В дисертацията са решени важни задачи от двете научни области - количествената теория на равномерно разпределените редици и квази – Монте Карло численото интегриране.
2. Получените резултати са интересни, отнасят до актуални проблеми на споменатите вече научни области. Те представляват принос на докторантката за развитието на теорията на равномерно разпределените редици и нейните приложения.
3. За доказване на основните теореми на дисертацията докторантката е преодоляла редици трудности от логичен и технически характер, което говори за наличие в нея на сериозни математически знания и култура.
4. Графически дисертацията е оформена много добре и съобразно изискванията за оформление на дисертационен труд.
5. Съдържанието на автореферата съответства на съдържанието на дисертацията.

Препоръки за бъдеща работа:

Ясно е, че една от основните идеи на дисертацията е представяне на хибридна версия на диафонията и изразяване на грешката на интегрирането в Хилбертови пространства, които са от Коробов тип в термините на хибридна теглова диафония. Но в дисертацията е показано, че освен от Коробов тип, съществуват Хилбертови пространства от типа на Соболев. В този смисъл, предлагам докторантката да разглежда Соболеви пространства и покаже използването на хибридни редици и мрежи в теорията на квази-Монте Карло интегрирането в тези пространства. Навярно на тази основа, ще могат да се разгледат нови типове хибридна диафония. Да се мотивират и намерят връзките, които съществуват между тези две величини.

Заклучение:

Получените в дисертацията резултати имат своето място и значение в общия научен процес от теориите на равномерно разпределените редици и квази – Монте Карло интегрирането и представляват принос на докторантката за развитието на тези научни области.

Като количество и най-вече като качество получените резултати са достатъчни и отговарят на изискванията за придобиването на образователната и научна степен „Доктор“.

На основание на получените резултати на Силвия Георгиева Байчева **може да се даде образователната и научна степен „Доктор“**.

25. 04. 2016 г.
София

Рецензент:
/Проф. д.т.н. Иван Димов /