

СТАНОВИЩЕ

относно съдържанието на дисертация на тема:

„Количествени мерки за разпределението на хибридни редици и мрежи и тяхното приложение в квази – Монте Карло интегрирането“

с автор **Силвия Георгиева Байчева**

за присъждане на образователна и научна степен **„Доктор“**

в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5. Математика

Представената за рецензиране дисертация е написана на 221 стандартни машинописни страници. В структурно отношение дисертацията е организирана като увод, четири глави, заключение с формулирани проблеми за бъдещи научни изследвания и цитирана литература.

Съдържание на дисертацията:

В увода накратко е описано съдържанието на дисертацията.

Първа глава от дисертацията няма приносен характер. Тя има за цел да въведе основните понятия и твърдения от теорията на равномерно разпределените редици и теорията на квази – Монте Карло интегрирането. Тук са представени целите на дисертацията. Те са дадени в една обща форма, тъй като все още в дисертацията няма въведена терминология. Тези цели дават общата насока на изследванията, представени по-нататък в дисертационния труд. Дадени са дефинициите и основните свойства на някои класове от ортонормирани функционални системи, каквито са Уолш функциите, Уолш функциите над крайни групи, функционалната система на Виленкин, или т. н. мултипликативна система. Те са основният инструмент за получаване на резултатите в този труд. Дефинира се понятието за равномерно разпределена редица, което е основно за дисертацията. Представени са интегралния и експоненциалния критерии на Вайл. Дадени са аналитичните конструкции на добре известни класове от равномерно разпределени редици, каквито са обобщената редица на Ван дер Корпут, (t,m,s) -мрежите и (t,s) -редиците. Дефинирани са дискрепансът и диафонията като количествени мерки за неравномерността на разпределението на редица. Показани са основните принципи и техники на квази – Монте Карло интегрирането в Хилбертови пространства.

Във втора глава на дисертацията докторантката е дефинирала нов тип на b – ичната диафония, тъй наречената $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафония. Това е направено в Дефиниция 2.2. Дефиницията на този тип диафония зависи от три параметъра. На мотивацията за тази зависимост на диафонията в дисертацията е отделено достатъчно място. На практика, с тази мотивация е свързана цялата трета глава на дисертацията, където е показано и едно приложение на така въведената диафония. В Теорема 2.1 е показан факта, че $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията е количествена мярка за равномерността на

разпределението на редица в куба $[0,1]^s$. В Теорема 2.2 е показана изчислителната сложност $O(N^2)$ на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията. В параграф 2.4 са показани 4 теореми в които са представени оценки отгоре и отдолу на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията на обобщената редица на Ван дер Корпут. За получаване на оценките от горе на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията основна роля играе резултатът на Лема 2.6. В тази лема е представена нетривиална оценка отгоре на тригонометричната сума на обобщената редица на Ван дер Корпут. Тази оценка е резултат от 2001 г., получен от Грозданов и Стоилова. Тук този факт е коректно обяснен. Старото доказателство на този оценка беше много дълго и свързано с разглеждането на различни случаи. Доказателството на докторантката е много кратко, елегантно и се основава на осъществено аналитично съответствие между разпределението на точките на обобщената редица на Ван дер Корпут и геометричния характер на стъпалата на функциите на Уолш. В Теорема 2.3, при условие, че параметърът $\beta=1$, е представена обща оценка отгоре на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията на обобщената редица на Ван дер Корпут. Тази оценка дава възможност, в зависимост от стойностите на параметъра α , да се получат порядъците на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията на обобщената редица на Ван дер Корпут. В Теорема 2.5 е показана точността на получените в Теорема 2.3 порядъци. В Теорема 2.4 и 2.6 същият проблем е решен, но в случая, когато параметърът $\beta=2$. До края на тази глава основните резултати са доказани. Същността на резултатите на глава втора на дисертацията е следната: показва се влиянието на експоненциалния параметър α и параметъра β върху точните порядъци и константите в тях на $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията на обобщената редица на Ван дер Корпут.

Глава трета на практика е едно естествено продължение на идеите и техниките, развити във втора глава. Тук от докторантката се въвежда функционалният клас

$H_{W(b);\alpha;\beta;\gamma}$. В Теорема 3.1 е получена точна формула за грешката в най-лошия случай на интегрирането в това пространство чрез използване на произволна s -мерна мрежа. В Теорема 3.2 е показано, че с точност до мултипликативна константа, грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{W(b);\alpha;\beta;\gamma}$ и $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията на мрежата, съставена от възлите на интегрирането, са равни помежду си. Този резултат отговаря на въпроса: Какво всъщност представлява $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията? Разбира се, отговорът е: $(W(b);\alpha;\beta;\gamma)$ -диафонията е грешката в най-лошия случай на интегрирането в някое конкретно Хилбертово пространство. В Теорема 3.5 и 3.6 са намерени порядъците на интегрирането в пространството $H_{W(b);\alpha;\beta;\gamma}$ чрез използването на някоя конкретна (t,m,s) -мрежа. Тук отново е показано влиянието на експоненциалния параметър α и параметъра β върху порядъците и стойността на константата в тях на грешката на интегрирането в това пространство.

В глава четвърта са използвани четири функционални системи – тригонометричната функционална система, системата на Уолш функциите над крайни групи, b – ичната функционална система и мултипликативната система, за да се дефинира един нов клас хибридна функционална система. В Теорема 4.1 е показано, че въведената хибридна функционална система е пълна ортонормирана функционална система над пространството $L_2([0,1]^s)$. Доказателството на тази теорема има конструктивен характер. Тази теорема може да се определи като теорема от типа на

теоремата на Вайерщрас. Не е развит хибриден хармоничен анализ. Но това не е и цел на дисертацията. Хибридна функционална система е използвана за да се дефинира понятието хибридна теглова диафония. Това е направено в Дефиниция 4.13. В Теорема 4.3 е показано, че хибридна теглова диафония е количествена мярка за равномерността на редици в куба $([0,1]^s)$. В Теорема 4.4 е показана изчислителната сложност $O(N^2)$ на хибридна теглова диафония. В параграф 4.7 е дефинирано хибридно Хилбертово пространство $H_{F, \alpha, \gamma}$. В Теорема 4.5 е представена формула за грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{F, \alpha, \gamma}$ чрез използвана на произволна мрежа. В Теорема 4.6 двете числови характеристики - грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{F, \alpha, \gamma}$ и хибридна теглова диафония на мрежата, състояща се от възлите на интегрирането, са свързани помежду си.

Изводи:

1. В дисертацията са поставени и успешно решени актуални научни проблеми от областите на количествената теория на равномерно разпределените редици и квази – Монте Карло численото интегриране.
2. За получаване на основните резултати в дисертацията са приложени редици техники от различни области, като теория на числата, функционалния анализ, числените методи, комплексния анализ, математическия анализ. За доказателството на основните резултати са използвани много на брой лема, където са извършени сложни пресмятания. Това говори за факта, че докторантката притежава голяма математическа култура, която и е позволила да реши поставените в дисертацията задачи.
3. Дисертацията е оформена много старателно и съответства на изискванията за оформление на дисертационен труд.
4. Съдържанието на автореферата напълно съответства на съдържанието на дисертацията.

Забелязани неточности: В хода на доказателството на Лема 4.13 е поставена формула, която е резултат от Лема 4.12. Разбира се, твърдението на Лема 4.13 е коректно, в хода на доказателството на лемата е откопирана и след това не е променена формула, взета от хода на доказателството на Лема 4.12. Това е формулата от ред 1 на стр. 206 от дисертацията. Аз смятам, че това е съвсем незначителен детайл, който има технически характер и не влияе на резултата на Лема 4.13.

Заклучение:

1. Получените в дисертацията резултати имат своето място и значение в общия научен процес от теориите на равномерно разпределените редици и квази – Монте Карло интегрирането и представляват принос на докторантката за развитието на тези научни области.

2. Получените в дисертацията резултати са достатъчни като количество и като качество и напълно отговарят на изискванията за придобиването на образователната и научна степен „Доктор“.
3. Категорично заявявам факта, че на базата на получените от Силвия Георгиева Байчева резултати, **тя заслужава да ѝ се присъди образователната и научна степен „Доктор“ по математика.**

18. 04. 2016 г.
Благоевград

член на научното жури:
/Доц. д-р Васил Грозданов /