

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

ИВАН АСЕНОВ МИРЧЕВ

**НОВ ОПИТ ЗА УСЪВЪРШЕНСТВАНЕ ИДЕИТЕ НА
ФЕЛИКС КЛАЙН В ОБУЧЕНИЕТО ПО
ПРИРОДНИ НАУКИ**

АВТОРЕФЕРАТ

**НА ДИСЕРТАЦИЯ ЗА ПРИСЪЖДАНЕ НА
НАУЧНАТА СТЕПЕН**

ДОКТОР НА НАУКИТЕ

Благоевград, 2012

Дисертационният труд е обсъден и предложен за защита на разширен катедрен съвет на катедра „Информатика“ допълнена с членове на катедрите „Математика“ и „Педагогика“ на ЮЗУ „Неофит Рилски“ – Благоевград и членове на ИМИ-БАН София.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 08.02.2012 г. от 11:00 часа в Заседателната зала на ИМИ-БАН, София.

Съдържание

Съдържание	3
Структура и съдържание	4
Идея. Мотиви. Основания. Актуалност на темата и проблемите.....	5
Някои аспекти на обучението по математика и природни науки. Диагностика на състоянието. Анализ и възможности за усъвършенстване и прилагане идеите на Феликс Клайн.....	17
Кратко изложение на дисертационния труд	33
Модел на учебно съдържание по теория на числата (за висшето училище).....	40
Модел на учебно съдържание по Графи. Оптимизационни алгоритми в мрежи (за висшето училище).....	42
Модел на учебно съдържание по Алгебра. Теория на числата. Графи. Математическо оптимизиране (за средното училище).....	46
Приноси.....	53
Отворени проблеми.....	56
Списък на публикации свързани с дисертационния труд	57
Цитирана литература	61

Структура и съдържание

Предложеният дисертационен труд е разработен в увод, четири глави, заключение, приложения и литература, съдържаща 203 литературни източници на кирилица и латиница.

Увод

Глава 1. Някои аспекти на обучението по математика и природни науки

1.1. Диагностика на състоянието. Анализ и възможности за усъвършенстване и прилагане идеите на Феликс Клайн

1.2. Педагого-психологически и методически аспекти на обучението по математика, свързани с предложения образователен модел

Глава 2. Модел на учебно съдържание и технология за обучение по теория на числата, теория на графите и оптимизиране

2.1. Две модификации на модела, експериментирани във висшето и средното училище

2.2. Разработка на теми от учебното съдържание за средното образование. Някои особености, методически указания и бележки

Глава 3. Статистическа обработка на данните и анализ на резултатите от педагогическия експеримент и анкетните проучвания

3.1. Анализ на резултатите от педагогическия експеримент

3.2. Анализ на резултатите от анкетните проучвания

Глава 4. Методически, организационни и управленски дейности, осигуряващи качество на обучението

Заключение

Литература

Приложение № 1

Приложение № 2

Идея. Мотиви. Основания. Актуалност на темата и проблемите

В увода на дисертационния труд се открояват базисни нерешени проблеми при обучението по математика и природни науки в средното и висшето училище, решаването на които изисква сериозни промени, свързани с модела на учебното съдържание, с технологиите за обучение, с организацията и управлението на един нов начин на обучение. Представени са обектът, предметът, целите, задачите, хипотезите, структурата и методите на изследване.

Съвременната наука, новите технологии и глобалните проблеми на човечеството изискват математиката и информатиката все по-дълбоко да навлизат в икономиката, планирането, науката за управление, човешките и междуинституционалните комуникации. Динамичните процеси в информационното общество и глобализацията изискват и съответни адекватни промени в обучението по математика, което продължава да има твърде „класически” характер и не отразява изключително бързото развитие както в областта на тези науки, така и в обществото като цяло. Огромните потоци информация, до които имат достъп сегашният ученик и студент, възможностите, които дава интернет средата, изискват по естествен начин един „отказ” от прекалено теоретичния, фундаменталния и системен подход и налагането на един добре обмислен прагматизъм в обучението. Прагматизмът не означава отказ от научни и дидактически принципи. По-точният термин може би е хуманизация и оптимална организация на учебния процес с цел постигане на добри резултати.

Това императивно предполага превръщането на обучението все повече в план за работа на ученика и студента, т. е. методиката на обучение все повече се превръща в методика на организация на извънаудиторната заетост – писане на домашни работи, подготовка и използване на материали за самостоятелна работа, защита на реферати и курсови проекти, работа в библиотека, работа в Internet, използване на обучаващи и контролни тестове и т. н., и т. н.

С други думи, методиката на обучение все повече се превръща в една сложна система от взаимоотношения и влияещи си

методически, организационни и управленски компоненти. Чистата методика на обучение започва много преди влизането на преподавателя в класната стая и аудиторията. Нейното успешно функциониране е свързано с:

- начините за прием в средните и висшите училища;
- начините за разпределение на студентите по специалности;
- начините за проектиране на учебната документация (учебни планове, учебни програми, конспекти);
- начините за наблюдение, оценяване и контрол на знанията и уменията на студентите и учениците, както и „принадената стойност“, наречена професионална компетентност;
- практическото обучение на учениците и студентите и тяхната професионална реализация;
- начините за определяне и формиране на трудовото възнаграждение на преподавателите (диференциран подход).

Особено важно е в обучението по математика да се осигури един по-плавен преход между средното и висшето образование и се потърсят възможности това обучение да се хуманизира.

Преди повече от 14 години съвместно с Б. Юруков изследвахме възможността елементи от математическото оптимизиране да бъдат използвани в средното училище. Целта ни беше следната: да се предложи подходящ модел за учебно съдържание; да се адаптират съответните теми за ученици; да се предложи технология за обучение, която се експериментира; след експеримента на база на получените резултати да се актуализира съдържанието и технологията и се даде експертна оценка за възможността този модел и технология да бъдат използвани. Някои основни мотиви, индуцирали тогава това първоначално изследване, както и сегашното негово сериозно обобщение по вертикалата и хоризонталата, са аналогични и актуални (виж Увод на дисертационния труд).

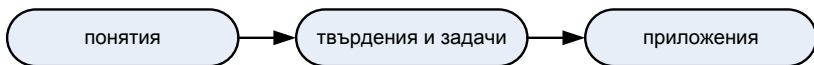
Чрез анкети установихме, че учениците от 9-11 клас изпитват страх от математиката и не искат да се занимават с нея. Изключения правят учениците от математическите гимназии. Една

от причините за това според нас е твърде абстрактният, теоретичен и неприложен характер на преподавания материал. Безспорно важни и фундаментални понятия и проблеми като производни на функции, логаритмични неравенства, геометрични тела, лица на сечения, аксиоми и доказателства, тригонометрични уравнения и неравенства, понякога ненужно натежават в процеса на обучение и не остават място и време да се види и асимилира достатъчно лесно и ясно приложният ефект от математическите знания. Един ученик от техникум по хранене и туризъм или селско стопанство, или от езикова гимназия трудно намира отговор на въпроса: „За какво ми е тази математика?!”. Друг е въпросът, че изброените горе „ненужни знания” са философия, начин на мислене, но това трудно се разбира от ученика и затова трябва по-достъпен начин, за да бъде убеден и спечелен за математиката съвременният ученик.

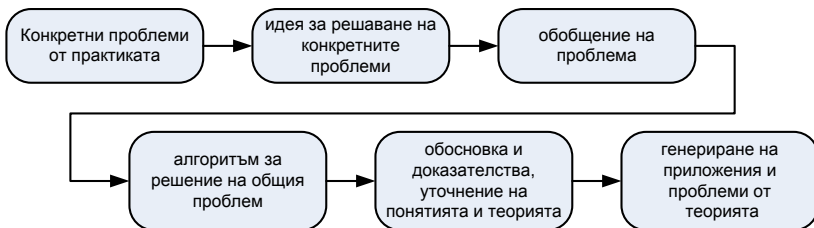
Често не се отчита спецификата на съответното средно училище, като се предлага еднакъв за всички учебен материал по математика – ЗИП или СИП, липсват кръжоци, семинари, консултации.

Тенденцията в повечето западноевропейски държави е обучението по математика в неспециализирани училища да запознава ученика с математически идеи, а не с тромави доказателства. Математическата формалност и абстрактност безспорно са важни и красиви, но само за тези, които се интересуват по-сериозно от математиката. В този тип училища математиката не може да бъде само цел, а трябва да бъде и средство, инструментариум за решаване на проблеми. Трудно един „средностатистически” ученик може да разбере красотата на идеята за непрекъснатост, когато тя е обременена с подробни доказателства на множество теореми за граници на редици, граници на функции за непрекъснатост на функции и т.н.

В психологичен план е ясно, че получаването на реални резултати в процеса на собствена дейност, мотивира ученика за влагане на волеви усилия при извършване на дейността. Класическият модел за преподаване на математика в нашите средни училища е:



Основна идея в изследването е класическият модел на преподаване да се обърне по следния начин:



По своята същност този подход е индуктивно-дедуктивен. В същото време такъв подход има и конструктивистки елементи – знанието се конструира от обучаваните, когато те са въввлечени в активно ефективно учене, което предполага свобода в действията на обучаваните и стимулиране на критичната им рефлексия и възможност словесно да си представят това, което извършват. Разбира се, този подход не е приложим в еднаква степен за всички теми от модела на учебно съдържание, предложен в Глава 2, но е възможен при всички теми от област теория на графите и оптимизиране.

Освен това в Глава 2 вече са разработени теми, които реализират този подход докрай. Например след изграждане на теорията за потоковите алгоритми (теми 56, 57), тази теория подсказва решаването на практически задачи (тема 60) – намиране на максимални по мощност и тежест сдвоявания (задача за сватбите, за назначенията и др.). Освен това подходът позволява проекции от една в друга научна или практическа област. Очевидна или поне лесна за показване е връзката между потоковите алгоритми и законите на Кирхоф от теория на електрическите вериги. По-късно ще дадем още примери в тази посока.

В обучението си ученикът попада в реални ситуации, които са сложни, и е немислимо да се решават без достатъчно мощни изчислителни средства. Масовата компютризация и изключително

бързото нарастване на изчислителните възможности на компютрите създават естествени условия за решаване на практически оптимизационни задачи. Изучаването на проблеми от математическото оптимизиране в часовете по математика и информатика дава изключително добри възможности за интеграционни връзки между информатика, математика, физика, химия, биология, икономика и др.

В българското средно училище съществува вече опит да се преподават количествени методи. В периода 1973-1986 г. в учебниците по „Математическо оптимизиране“ [83] и „Числени методи 10“ [84] с автори Г. Христов и Р. Калтинска такава тематика беше разглеждана.

Изучаването на предложената тематика не изисква допълнителни математически знания у учениците в средното училище.

Във висшите училища се преподават системни курсове по тази тематика. Това дава възможност части от тях да бъдат адаптирани за средното училище, което ще осигури един по-плавен преход към висшето образование.

Последното ни по-важно основание беше фактът, че в средното училище не беше провеждан експеримент, който да изясни необходимо ли е, полезно ли е да се дават подобен род знания, как да се прави и кога. Изследването е интересен опит да се даде отговор на тези проблеми.

Гореизброените мотиви индуцираха изследването, което реализирахме и най-съществената оценка за получените от нас резултати (освен успешната защита и хабилитация на доц. д-р Б. Юруков и д-р З. Алексов) беше изразена от учениците в следната реплика: „Кога ще идвате отново в училище, за да нямаме математика?“. Това беше индиректна оценка за опита да се хуманизира обучението по математика в средното училище, да се преподава една математика с човешко лице, като се разкрива нейният приложен характер, като се преподават идеи, като се използват непълни доказателства, като се работи в екип, като се осигурява самостоятелна работа на ученика, като се търси интердисциплинарност, като се формулират красивите

математически идеи на достъпен език и се илюстрират с подходящи примери.

Необходимостта от актуализация на учебното съдържание, от намирането на по-добър баланс в теоретико-приложен аспект, необходимостта от връщането към традиционни за българската образователна система начини и подходи за обучение, звучащи съвременно и днес, беше допълнително основание това изследване да се разшири, като се включат допълнително въпроси от алгебрата (теория на числата), теория на графите и оптимизиране. Освен това разширение по хоризонталата, в новите изследвания, представени тук, се прави опит за едно движение по вертикалата, а именно, адаптиране на въпроси от гореспоменатите области на математиката за ученици от началното и основното училище. Тези изследвания бяха експериментирани съвместно с М. Кацарска в някои училища на Благоевград и Югозападна България.

Идеята беше разширена в още две посоки – да се експериментира и да се оценяват получените резултати при условия, че съществуват разработени писмени материали за самостоятелна подготовка на обучаваните и да се търси чрез разработките интердисциплинарност.

Освен това беше сменен моделът да се експериментира спорадично с лектори от висшето училище. За целта в курса за следдипломна квалификация за учители беше включена учебната дисциплина „Задачи и алгоритми в извънкласната работа”. Това даде възможност да се реализира проект, който изследва резултатите от едно по-системно преподаване обезпечено с добре подготвени за целта учители. Изпитната процедура, предвидена за гореспоменатия учебен курс, се състоеше в подготовка на няколко занятия за кръжочна работа или СИП. Получените резултати, които ще бъдат коментирани по-късно, затвърдиха и подобриха позитивните тенденции и резултати, показвани от учениците.

Най-общо идеята е, да се потърси и възобнови липсващата през последните 20 години връзка между средното и висшето образование. „Алгебрата”, „Теорията на числата”, „Теорията на графите” и „Оптимизирането”, „Училищния курс по алгебра” и „Задачи и алгоритми в извънкласната работа” са университетски учебни дисциплини, които се преподават в ЮЗУ „Неофит Рилски” и

други университети. Учебното съдържание на тези университетски курсове е отлична възможност да се подберат подходящи теми, които да се адаптират съобразно възрастовите особености за ученици. С други думи, да се конструира модел на учебно съдържание и се предложи методика и образователни технологии за изучаване на тази тематика по-задълбочено още в средното образование. В [70] М. Георгиева е реализирала идеята елементи от теория на графите да се преподават още в началното училище, като е изследвана рефлексията. В [71] Сава Гроздев, използвайки многогодишния си натрупан опит, разглежда теорията и практиката на подготовката на изявени ученици за участие в олимпиади и състезания. Нещо, което може успешно да се прилага при кръжочната работа и други извънурочни форми на подготовка.

Идеята да се преподава и води обучение на ученици от 3-ти – 12-ти клас по тематика, традиционно предназначена за висшите училища, в началото изглежда екзотична и твърде амбициозна. Впоследствие, когато бъде намерена добра методика и технология за това, съобразена най-вече с възрастовите особености на децата, се оказва, че:

1. това е възможно;
2. това е полезно;
3. това е необходимо;
4. това е целесъобразно.

Възможно е, защото проблемите, които се разглеждат в тези области на математиката и начините за описване на техните решения, са естествени и интересни. Полезно е, защото обучението в тези области дава на децата добър инструментариум за лесно решаване на задачи, които изглеждат трудни и са предмет на разглеждане в по-горен клас. Необходимо е, защото те разбират, че математиката е нещо интересно и нещо по-общо от смятането и решаването на уравнения и неравенства. Целесъобразно е, защото обогатява общата култура на човека, начина му на мислене и прави непрекъснат и взаимосвързан процеса на обучение от началното училище до завършване на университета (и след това).

Паралелно с експеримента, проведен в средните училища, беше изследвана и възможността при преподаването на теория на графите и оптимизационни алгоритми в ЮЗУ „Неофит Рилски”

(задължителни учебни дисциплини) в специалностите „Математика“, „Информатика“ и „Компютърни системи и технологии“ да бъде използвана същата технология (проблем начин за решаване обобщение на проблема общ метод за решение уточняване на понятийния апарат и теоретична обосновка на проблема).

Резултатите от тези два експеримента („лошите“ ученици ставаха „добри“) послужиха за основа, генерираща идеята да се направи проучване за качеството и състоянието на обучението по математика в средните и висшите училища. Процесът на обучение и отношението към него бяха изследвани посредством система от взаимообвързани индикатори, разделени в няколко групи, някои от които са:

Индикатори за организация и обезпеченост на учебния процес:

1. Систематизираност и достъпност в поднасянето на учебния материал;
2. Използване на разнообразни и подпомагащи обучението материали;
3. Навременен започване и завършване на часовете;
4. Възможност за дискусии и за създаване на творческа обстановка;
5. Наличие на ясни правила за наблюдение, оценяване и контрол;

Индикатори за отношението „преподавател - ученик“:

1. Поддържане на обратна връзка;
2. Такт и коректност при общуването;
3. Безпристрастност;
4. Съвременен „звучен“ на учителя.

Индикатори за оценка от страна на учениците на професионалната подготовка на преподавателите:

1. Наличие на ерудиция;
2. Научна култура;
3. Преподаване на нови знания в съответната област.

Всеки един индикатор, оформен като съждение, е оценяван по петстепенна скала:

1. „Категорично да“;

2. „По-скоро да”;
3. „Не знам”;
4. „По-скоро не”;
5. „Категорично не”.

Определена група от въпроси бяха свързани с нагласите на двете изследвани групи една към друга, което позволи да се изгради образът на Другия в образователния процес. По-конкретни резултати от това изследване са дадени в Глава 3 и Приложения 1 и 2.

Като следствие от реализираните експерименти и след анализ на получените резултати се оформи следната основна хипотеза. „Разглеждането на методиката на обучение в абстрактна среда (краткосрочни експерименти, липса на съпътстващи адекватни, организационни и управленски дейности), липсата на корелации в методиката за обучение в средното и висшето образование, липсата на по-плавен преход между средното и висшето образование, липсата на хуманност в обучението по математика, водят до резултати, които не са адекватни на съвременните изисквания и не осигуряват качество на обучението”.

Това налага проектирането и внедряването на системи за обучение на студенти и ученици, осигуряващи по-голяма приемственост в обучението, по-силни интеграционни връзки и хуманизация на това обучение. От тук произтича по естествен път и се налага едно сериозно проучване и корекции в съществуващите системи, осигуряващи качество на образованието в средните и висши училища. Резултатите от такова проучване, констатираните добри и лоши практики са анализирани в Глава 3 и Глава 4. Като следствие от всичко казано дотук можем да резюмираме следното.

Обект на изследването са: ученици и студенти и тяхната образователно-познавателна дейност, и преподаватели в средни и висши училища и тяхната преподавателска дейност.

Предмет на изследването са: закономерностите на процеса формиращ математически знания, както и знания и умения по естествените науки като функция на системата от методически, организационни и управленски компоненти на обучението.

Цели на изследването са:

1. Създаване на система от методически, организационни и управленски компоненти в обучението по математика, осигуряваща

качество на обучението и плавен преход от средното към висшето образование.

2. Да бъде изследвана възможността обучението по математика в средните и висшите училища да се хуманизира и се потърсят междупредметните връзки при обучението по природни науки.

3. Да бъде изследвана възможността за преподаване на елементи от алгебра, теория на числата, теория на графите и математическото оптимизиране в средното училище с цел подобряване на учебно-познавателното взаимодействие.

4. Да бъде изследвано съществуването и състоянието на системите, осигуряващи качеството на обучението в средните и висшите училища.

5. Да бъдат анализирани методическите, организационните и управленските дейности, осигуряващи качествено обучение, и се проучат и предложат конкретни добри практики и опит.

Задачи на изследването са:

1. Да се очертаят и дадат тенденциите в технологията на преподаване на теория на числата, теория на графите и математическото оптимизиране.

2. Да се направи анализ на психолого-педагогическите, дидактическите и методическите особености на обучението по математика в контекста на предложения от автора образователен модел.

3. Да се направи подбор на подходящи въпроси и оформи модел на учебно съдържание съобразно интердисциплинните връзки, възрастовата специфика и спецификата на съответното училище, специалност или профил, като се предложи и подходяща технология за обучение.

4. Да се разработят обучаващите теми и съответните методически указания за тяхното преподаване на различни по трудност нива или за различни възрастови групи.

5. Да се акцентира върху приложния и занимателен характер на математиката и по този начин да се повиши интересът на учениците и студентите, да се подобри тяхното алгоритмично мислене и умения за моделиране и решаване на реални проблеми.

6. Да се реализира експеримент с коригиращи функции върху учебното съдържание и избраната методика и технологии.

7. Да се дадат подходящи примери и начини за прилагане на елементи от система за качеството, осигуряваща оптимално обучение.

За реализиране на целта и задачите се използваха следните методи:

1. Обзор и анализ на опита в различни държави. Проучване и прогнозиране на тенденциите в обучението по математика в различни образователни системи.

2. Дидактически експеримент.

3. Анкетирание на преподаватели, ученици и студенти включени в експеримента.

4. Метод на експертни оценки.

5. Статистически методи за обработка и анализ на експериментални данни.

Начални хипотези:

1. Методиката на обучение в съвременните условия е методика за организация на система от дейности, обезпечаващи получаването на знания, формирането на умения и придобиването на компетенции;

2. Преподаване на елементи от алгебра, теория на числата, теория на графите и математическото оптимизиране в средните и висшите училища е възможно, необходимо и полезно, поради широките взаимовръзки, които тези две области на математиката създават в областта на естествените науки;

3. Използването на индуктивен и конструктивистки подход, умелото съчетаване на непроблемното с проблемното обучение и използването на подход, необременен с формални доказателства, а наситен с разсъждения, в които се акцентира върху математическите идеи чрез решаване на интересни, нестандартни, занимателни и практически проблеми и използването на „непълни доказателства”, активизира участието на обучаемите в процеса на обучение;

4. Съществуването на системи, осигуряващи качество на обучението, в това число системи за наблюдение, оценяване и контрол на знанията, уменията и компетентностите на учениците и студентите, подобрява резултатите и оптимизира обучението;

5. Осъвременяването и осъзнатото използване на дидактическите принципи е резерв за съществено повишаване качеството на обучението по математика

6. Като следствие от 1, 2, 3, 4 и 5 се повишават мотивацията, успеваемостта и мобилността на учениците и студентите.

Резултати, приноси и отворени проблеми:

Обобщените резултати, приносните моменти и отворените проблеми са описани след Глава 4 в Заключение.

Като цяло изследването е опит за принос в методиката на обучение по математика и информатика, основаващ се на някои нови тенденции в българското и европейското средно и висше образование. То е опит да се осигури съвременно обучение по математика, съобразено с добрите традиции в българското образование, адекватно на научните, образователните и обществено-икономическите приоритети, утвърдени в европейските държави.

Освен това направеното изследване и получените резултати са добра основа за по-нататъшно внедряване на системи, осигуряващи качество на обучението.

Много от получените резултати са публикувани от автора в списания и сборници с доклади (виж цитираната литература и списъка с публикации по темата), както и в [162].

Структура и съдържание:

Настоящото изследване е структурирано в увод, четири глави, заключение, литература и приложения.

В Увода са дадени структурата, основанията, идеята, целите и задачите, обектът, методите, основните хипотези и някои конкретни резултати на изследването.

В Глава 1 са разгледани някои аспекти на обучението по математика и природни науки. Направен е анализ, диагностика на състоянието и са разгледани възможностите за усъвършенстване и прилагане идеите на Феликс Клайн. Освен това са разгледани някои педагого-психологически и методически особености на обучението по математика, свързани с предложения в Глава 2 образователен модел. Специално място е отделено на зависимостта на реализацията на дидактическите принципи един от друг и на тяхната насоченост към учащите се, към преподавателите или авторите на учебници.

В Глава 2 е предложен модел на учебно съдържание и технология за обучение по теория на числата, теория на графите и математическо оптимизиране. Реализирана е адаптация на редица теми от гореспоменатите области, приложими в извънкласната работа в средното училище. Конкретните теми са разработени с подробни методически указания и бележки и са предназначени за учители и ученици.

В Глава 3 са дадени и анализирани резултати от статистическата обработка на данните от педагогическия експеримент и направените анкетни проучвания с ученици, преподаватели и студенти. Потърсени са отговори на въпросите:

- доколко успешен е реализираният експеримент;
- осигурено ли е качество на обучението по математика в средното и висшето образование?

В Глава 4 са посочени и анализирани методическите, организационните и управленските фактори и връзки в системата, наречена съвременно обучение по математика. Обоснована е тезата, че съвременната методика на обучението все повече се превръща в методика на организацията и управлението на обучението.

В Заключение са дадени приносите на автора и изследването, като са посочени някои отворени и нерешени проблеми.

Цитираната литература е дадена по реда на използването ѝ.

Приложенията съдържат данни от направения педагогически експеримент и анкетните проучвания.

Някои аспекти на обучението по математика и природни науки. Диагностика на състоянието. Анализ и възможности за усъвършенстване и прилагане идеите на Феликс Клайн

Предлаганата дисертация, както личи от заглавието, е повлияна от идеята на известния немски математик Феликс Клайн за осъзнато по-тясно обвързване на съдържанието на

обучението по математика в средното и висшето училище. Тази идея Клайн развива в края на 19 и началото на 20 век. Той ѝ дава кратък словесен израз чрез наименованието „явление за двойното забравяне“. По онова време съдържанията на споменатите две нива на обучение са толкова откъснати по характер едно от друго, че вместо да си помагат, те си пречат. По този повод Клайн заявява следното: „Съдържанието на обучението по математика в средното училище е толкова далеч от математиката във Висшето училище, че за да е в състояние един ученик вече като студент да разбира съдържанието във Висшето училище, той трябва да забрави онова, което е учил в средното училище. По-късно обаче, когато получи висше образование и се дипломира, за да върши полезна работа в средното училище, той трябва да забрави всичко, което е учил преди това във висшето училище.“ Причина за това явление е обстоятелството, че изучаваната в средното училище математика е тази, която е била развита до към края на 16 век и по онова време е била наричана „елементарна математика“. В същото време във висшето училище се е изучавала, а и сега се изучава математика, която се развива през 17 век и след това. Именно тази математика Клайн и съвременниците му наричат „висша математика“.

Феликс Клайн чете курс „Елементарната математика от гледна точка на висшата“ [189]. За математиците е ясно, че чисто научните идеи на Феликс Клайн основно са оформени в неговата работа „сравнителни разглеждания върху новите геометрични изследвания“, която дава ясна перспектива за понататъшното развитие на геометрията. В математическото всекидневие е добило гражданственост името „Ерлангенска програма“, която е важен исторически документ, но и в същото време източник на математическо творчество.

Основната идея на Ерлангенската програма се състои в това, че обектът на геометрията е системата от инварианти на някоя група преобразувания от едно непрекъснато многообразие и че различните системи геометрии се различават помежду си дотолкова, доколкото са различни структурите на поставените в тяхната основа групи.

В лекциите на Феликс Клайн, четени в Гьотинген, личи ясно стремежа на учения към синтезиране. „Стремейки се да разкрие научната дисциплина в нейната цялост, Клайн се стареае да обхване възможно най-широко областта на различните приложения на науката и заедно с това да представи математическите науки като съставна част на човешката култура. Един от учениците на Клайн – Курант, предава по следния начин в посветения на паметта на учителя некролог думите на Клайн: „Все по-ясно ми става, че ако игнорираме далечните перспективи, то и чисто научното творчество ще пострада, и че научното творчество, откъснато от многостранното, животрептящо общо духовно развитие, е осъдено да линее, както линее растение, поставено на тъмно и лишено от слънчева светлина.“ [191]

Като общественик и педагог Ф. Клайн активно участва в реорганизацията на немската образователна система. Макар да не е успял да осъществи напълно планове си, много от неговите предложения са реализирани въпреки силната съпротива на консервативните кръгове. **„Ще отбележим само, че в основата на програмата на Клайн лежи идеята, че на цялото образование трябва да се придаде естественонаучен уклон в противовес на онзи „класически“ уклон, който господства в немското училище до реформата. Що се отнася до преподаването на математиката, то Клайн изисква математиката да се преподава не като затворена в себе си логическа дисциплина, а като съставна част от общата система на човешките знания. Той настоява преподаването да започва от нагледните неща и бавно и постепенно да води ученика към абстрактните идеи. Заедно с това Клайн се стреми основните идеи на съвременната математика – на първо място идеята за функционалната зависимост – да се усвояват от учащите се още от ученическата скамейка. За да предпази учителите от възможни грешки и увлечения в една или друга насока, Клайн настойчиво препоръчва на преподавателите да изучават историята на математиката, като постоянно подчертава неблагоприятията в това отношение.“**

С тази програма на Клайн е тясно свързано едно колосално по замисъл мероприятие, започнато през 1908 г. по инициатива на Клайн и на американския математик и историк Е. Смит – организиране на международна комисия по изучаване на структурата на преподаване на математиката във всички страни в света. Публикуваните от комисията материали трябвало да легнат в основата на реорганизацията на преподаването на математиката във всички степени на обучението. Световната война прекъсва работата на комисията, но немското ѝ отделение, оглавявано от Клайн, довежда работата докрай, като издава пет тома в продължение на 1909 – 1916 г.“ [191].

Вероятно под негово влияние в България първият български професор по математика Емануил Иванов в началото на 20 век чете в Софийски университет курс „Елементарна математика“. По-късно неговият ученик проф. Любомир Чакалов (впоследствие академик) продължава идеята. След 1944 г. към катедрата му по „Висш анализ“ в СУ „Кл. Охридски“ проф. Чакалов организира за студентите, готвещи се за учители по математика, четене на лекции по „Елементарна алгебра“, „Елементарна геометрия“, „Елементарна тригонометрия“ и „Аритметика“.

Ще отбележим, че въпросните курсове не оправдават очакванията за свързване на съдържанията на училищната математика и тази, изучавана във висшето училище. Самите курсове са били често променяни.

От 60-те години на миналия век започва търсене на нов, по-гъвкав начин за решаване на проблема. Забелязва се следният процес. Докато по принцип в курсовете по елементарна математика се е търсела възможност за разглеждане на понятията от училищната математика като понятия от курсовете във висшето училище, т.е. търсело се е влияние на понятията от науката, преподавана във висшето училище, то се появява и съчетание с обратното влияние.

Според свидетелството на проф. Иван Ганчев, в доклад, изнесен в Москва през м. декември 1965 г., известният Ляпин-младши критикува курсовете по елементарна математика и отбелязва, че те не са оправдали очакваните резултати като

самостоятелни курсове. Ляпин предлага следната нова идея: всеки преподавател във висшето училище да потърси внимателно в преподаваната от него дисциплина онези елементи, които биха имали място в училищния курс и да посочи ясно тези елементи в съответните лекции. Според Ляпин така много по-добре би се осъществила връзката между училищната математика и математиката във висшето училище, за да се получи едно цяло. Като пример Ляпин посочва „училищното тълкуване“ на основни понятия от алгебричните структури и свързаните с тях операции и релации.

Именно тази идея е реализирана у нас в обучението по математика от проф. Иван Ганчев в неговия учебник за 5. клас от 70-те години на 20 век. При създаването в Софийски университет на т. нар. „модел за висше образование по математика от нов тип“ курсовете по елементарна математика се заменят с курс, наречен „Училищен курс по математика за учители“. Тогава на проф. Алипи Матеев и ст. ас. кпн Иван Ганчев се възлага да подготвят съответна програма. През 1973 г. ст. ас. кпн Иван Ганчев е натоварен да чете въпросния курс. По негови спомени, в личен разговор известният проф. А. И. Маркушевич оценява високо курса и го квалифицира като „възраждане“ на идеята на Феликс Клайн в новите условия. Основни идеи от курса са реализирани в споменатия по-горе учебник за 5. клас.

В разработената от нас Тема № 30 „Принцип на Дирихле (5. – 7. клас, второ ниво)“ се вижда, че учениците почти се довеждат до понятието „група“ без да се използва съответния термин. Разбира се, необходимата подготовка за целите на езика е осъществена предварително до 4. клас. Примери като този ни окуражиха. Естественият въпрос, който възниква, е до каква степен на подробности следва да се въвеждат новите научни понятия в училищното съдържание по математика. При това е ясно, че не всички понятия са еднакво съществени. Отговорът се крие в субективната оценка на преподавателя-изследовател. Според нас е достатъчно да се включват само термините, които участват във формулировките на темите от съдържанието на курса.

Връзката между двете нива на обучение се осъществява чрез темите от „Теория на графите“ и „Математическо оптимизиране“. Там фактически е реализирана идеята на Феликс Клайн, без това да е споменато явно. Става дума за един нов начин, при който училищната математика се обвързва с математиката във висшето училище. Нещо повече, стана ясно, че подобен подход е осъществим и за много други теми от училищния курс. Затова направените в труда предложения могат да се разглеждат като конкретизации на общата идея, разбира се след внасяне на необходимите корекции във формулировките. Идеята за аналогия и обобщаване води естествено до осъзнаване на необходимостта и целесъобразността от създаването на единна технология за съгласуване на съответните двойки теми от училищния курс и курсовете по математика във висшето училище. Схемата се състои от следните основни етапи:

1. Определяне на основните понятия от конкретната тема в училищния курс и намиране на мястото им в съответната тема и курс във висшето училище. Ако темата заема важно място в училищния курс, следва да се определят повече дейности във връзка с изучаването ѝ в училище. Времето за тези дейности може да е за сметка на други теми.

2. Избиране на съответни задачи, евентуално занимателни или приложни.

3. Посочване на онези задачи, които са задължителни за следващи занятия.

От изложението дотук се вижда, че назрява идеята за реализация на едно ново обвързване на училищната математика с математиката във висшето училище. Ролята на училищната математика в това обвързване би следвало да е подчинена на висшата математика, но в същото време тя е и определяща за съответните курсове във висшето училище. Предмет на изследване в настоящата дисертация са закономерностите на процеса, при който се формират математически знания и умения като функция на системата от методически, организационни и управленски компоненти на обучението не само по математика, но и по всички природни науки – физика, химия и биология, изучавани в училище. Въпреки направената по-горе фактическа

критика по принцип на изоставането на училищния курс по математика от математиката във висшето училище, трябва да се отбележи съществуването на случаи, при които изложението на теми в училищния курс изпреварва това във висшето училище.

Разговори с колеги – физици, химици и биолози, затвърдиха у мен впечатлението, че подобни случаи има по другите предмети и съответните учебни дисциплини. Например темата за вектори е тема не само от училищния курс по математика и съответните курсове във висшето училище, но е тема и от съответните курсове по химия (в училище и във висшето училище). Доколкото ми е известно „молекулярната химия“ в училище е изпреварила (някъде през 18–19 век) „молекулярната химия“ във висшето училище. Подобна ситуация съществува и в генетиката.

Някои приложения на графите и математическото оптимизиране във физиката и химията

Алгоритмите в линейната, нелинейна и дискретна оптимизация са полезно средство при изучаване на неподредени аморфни материали и стъкла. Тези системи имат нетривиална минимална конфигурация на енергията, което е основна отличителна черта на физиката при ниски температури.

Във физиката са добре известни много приложения на оптимизационните методи:

- В курсовете по теоретична физика и класическата механика чрез оптимизационни методи е получено диференциалното уравнение на Ойлер-Лагранж;
- Физичните системи се подчиняват на принципите за минимизация. Например в термодинамиката една система, съединена с нагревател, винаги заема състояние с минимална свободна енергия;
- При изчисляване на квантовомеханичното поведение на атоми или молекули често се прилага вариационно приближение;

- Често оптимизацията се използва като инструмент – когато една функция с различни параметри се фитва към експериментално получени данни.

Независимо от тези класически приложения през последното десетилетие много проблеми във физиката са фактически и оптимизационни проблеми. Например [196, 197, 198]:

- Намиране на сродни свойства на полимери в произволна среда;
- Изучаване на интерфейсите и еластичните разнообразия в неподредени системи;
- Изучаване на поведението на неподредени магнетици при ниски температури;
- Оценка на морфологията на електронните потоци или т. нар. линии на флукса при високотемпературни свръхпроводници;
- Анализ на резултати от изследване с R -лъчи;
- Оптимизация на лазери/оптични влакна;
- Реконструкция на геологични структури от сеизмични измервания и др.

От друга страна някои класически проблеми на комбинаторното оптимизиране привличат вниманието на физиците, защото за тяхното решаване могат да бъдат приложени методите на статистическата физика.

Един оптимизационен проблем математически може да бъде описан по следния начин:

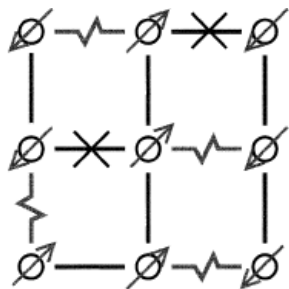
Нека $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ е вектор с n елемента, който може да приема стойности от областта $X^n: \sigma_i \in X$. Областта X може да бъде или дискретна, например $X = \{0,1\}$, или $X = \mathbb{Z}$, или $X = \mathbb{R}$. Освен това нека H е функция на реална величина, а във физиката обикновено това е Хамилтониана или енергията на системата. В случая минимизационният проблем е *комбинаторен* или *дискретен* и може да бъде представен по следния начин:

Да се намери вектор $\underline{\sigma} \in X^n$, който минимизира H .

Ограниченията, които трябва да бъдат наложени при решаването му, могат да бъдат представени чрез допълнителни уравнения или неравенства. Случайна стойност на $\underline{\sigma}$, която удовлетворява произволни ограничения, се нарича *приложима*. Обикновено ограниченията могат да бъдат наложени по подходящ начин без да се дават уравнения или неравенства. Това може да бъде онагледено чрез примера с „Проблема на пътуващия търговец” (TSP – Traveling Salesman Problem). TSP произтича от ежедневието. Един пример от физиката, който описва магнитните материали, може да бъде представен чрез модела за спиновите стъкла - ISG (Ising Spin Glasses).

Спинът представлява собствен момент на импулса на елементарни частици с квантова природа, който поради анизотропията на обкръжението му има две ориентации, наречени *нагоре* и *надолу* $\sigma_i = \pm 1$. Най-простият модел на магнитните материали допуска, че спиновете са разположени в проста решетка и че взаимодействат само с техните най-близки съседи.

Много по-сложен клас материали са спиновите стъкла, при които се наблюдават не само феромагнитни, но и антиферомагнитни взаимодействия. Двойка съседни спинове, свързани чрез антиферомагнитни взаимодействия, са с различни ориентации. В спиновите стъкла феромагнитните и антиферомагнитни взаимодействия са разпределени произволно в решетката и намирането на минималната енергия е нетривиален минимизационен проблем.



Фиг. Модел на двумерно спиново стъкло.

Посочените два примера TSP и ISG като цяло са еквивалентни по изчислителна сложност.

Да разгледаме например аморфните проводници. Те са изградени от отделни микрочастици, които са или проводящи или не с вероятност p и $1-p$ съответно. Ток между две съседни заети места от решетката може да протече, когато те са *свързани*. Очевидно през един макроскопичен образец електричен ток може да протече тогава и само тогава, ако градивните му частици образуват свързващ кластер, разпрострян между два противоположни края на образца. Тази физична ситуация може да бъде представена чрез граф, идентифициращ свързаните частици чрез *възлови точки*, а връзките между съседни свързани частици – чрез *ръбове*. В случая въпросът за това дали целият образец е проводящ е еквивалентен на търсенето на свързващ път между една подрешетка от възли (една граница) до друга подрешетка (противоположна граница). Следователно важно е да се разгледат графични алгоритми, които отговарят на въпроса дали има свързващ път между два възела i и j . Като допълнение на това, тези графични алгоритми позволяват да се определи колко много (или колко дълги) свързващи компоненти или кластери съдържа един граф и какви са техните статистически свойства при произволен граф.

Освен това физичната ситуация може да бъде усложнена от факта, че не всички свързани частици имат една и съща проводимост. Ако концентрацията на свързаните частици е достатъчно голяма е необходимо да се знае пътя на най-малкото съпротивление. В [199] е представен алгоритъм, известен в литературата като „Проблем на най-краткия път”. Като допълнение е представен алгоритъм за определяне на цикъл (затворен път).

В литературата се срещат голям брой ефективни алгоритми за изследване на аморфни проводници, основаващи се на проблема за филтриране на връзките (The Connectivity Percolation Problem), а именно - алгоритмите на Leath [200]; Hosten-Kopelman [201], „горския пожар” (the forest-fire algorithm [202]) и на „нашествието” (invasion algorithm) [203].

При прилагане на теорията на графите във физиката разстоянието между възлите има смисъл на някой физичен параметър – например съпротивление, потенциална енергия и др. Например една мрежа от произволни съпротивления може да бъде изградена не от проводящи и непроводящи връзки, а от връзки с различни съпротивления. Разглеждайки съпротивлението между два възела като разстояние, най-краткият път от един възел до друг е този, през който преминават най-много носители на заряд (токоносители). Известно е, че електричният ток в една разклонена електрическа верига преминава по пътя на най-малкото съпротивление. Аналогично, в произволна статична мрежа, в която връзките между възлите са с различна сила, отново разглеждани като разстояния, най-краткият път от едно място на материала до друго е този, при който разкъсването на връзката се наблюдава при достатъчно големи напрежения. Например полимерът в една произволна среда представлява по същество една еластична нишка (в случая на едномерен обект) и се търси най-ниския потенциал и минимума на еластичната енергия на нишката. Отново този проблем може да бъде онагледен с една мрежа с произволни потенциални енергии като разстояния и най-краткият път е конфигурацията на основните състояния на полимера. В [199] са представени алгоритми, с които тези проблеми могат да се решат ефективно.

Могат да бъдат дадени подобни десетки примери на интерпретиране и на химически структури, процеси на взаимодействия и предизвиканите от тях например биологични активности чрез графови структури, дискретни оптимизационни процеси и задачи (виж [192] и [193]).

Интересът към теорията на „химичните графи“ доведе до въвеждането на нови понятия, намери приложение в корелацията структура – свойство – активност.

Установено е, че индексът на свързаност, основан на структурно-претеглените връзки дава превъзходни корелации с многочислени молекулярни свойства, включващи и някои биологични активности.

Обикновено атомите на молекулярните структури се интерпретират като върхове на граф, а релаксираните връзки между тях като ребра на графа. Два графа могат да изобразяват една и съща молекула, а различието им идва от двумерното или тримерното им представяне. Изоморфизмът на такива графи и самото негово установяване позволява изследването на подобни съединения със зададени отнапред химични или биологични свойства и активности.

Наред с изоморфизма в лекарствения дизайн са интересни математическите модели на графовата (молекулярната) сложност, тясно свързана с топологията на съединенията, които се изследват. Тази сложност пък води към информационна сложност на обектите, основана на молекулярната симетрия.

Като потвърждение и илюстрация на гореказаното, в Глава 2 сме дали разработка на Тема № 61 „Изследване на пространствената структура на белтъците“, предназначена за студенти.

Факт е, че редица изследвания в областта на методиката на обучението са спорадични явления, които често са сравнително повърхностни и не са подчинени на сериозен анализ – как се обучават учениците и студентите, на какво се обучават и с каква цел.

Причините за лошото състояние на обучението обикновено се търсят в „лошия материал“, с който се работи във всяка степен на образованието. Обикновено една от причините е лошата начална подготовка при стъпване в следващата образователна степен. Така причината никога не е конкретна, отнасяща се за настоящия момент, а е някъде вън от нас. Второто основно оправдание е, че учебниците са твърде много или пък не са добри. Третата причина обикновено са учителите и родителите, държащи се индиферентно към изоставащите деца.

Остатъчните знания на съвременния ученик и студент са плачевни. Голям брой хора са убедени, че Слънцето се върти около Земята.

Огромен брой от учениците и студентите завършващи математика не знаят коя е първата производна на пътя S.

Образованието за съжаление започва да е дейност без ясни и реалистични цели, което активно руши тази дейност. През миналия век, можем да кажем, че основната цел е била *получаване на професия*. По това време завършването на средно и висше образование са били стабилна основа за работа по специалността. Образованието осигуряваше необходим запас от знания и умения. Смяната на професия до средата и края на миналия век можеха да се считат за пренебрежимо малка величина, касаеща най-вече някои особености на личността. В края на миналия век и началото на ХХІ век, обаче професионалната депривация е факт, т.е смяната на професията е, и се възприема като норма. Технологиите във всяка сфера радикално се обновяват, така че е невъзможно да се работи по старому, а усвояването на нова технология, за да съхраниш старата професия е загуба на време. По своята същност понятието „обучение през целия живот“ предполага задължението да смениш своята *дейност*.

Като следствие възниква генералния въпрос – защо ни е нужно образованието въобще? Защо ми е нужна математиката, ако в живота си аз няма да ставам математик? Ако ще ставам химик, защо ме интересува средновековната история? Какво означава това? Това означава, че в образованието трябва да се търси не толкова предметното знание, а нещо друго, което излиза извън обхвата на това знание, т. е. някаква висша същност. Според Н. Розов това е понятието дейност. „Именно „дейност“ като понятие се оказва централно за педагогиката. Ако се опрем на разбирането на понятието дейност, ще можем да решим повдигнатия от нас проблем. Цел на образованието е подготовка на човека за бъдеща дейност в обществото, а съдържание на образованието – усвояване на общите методи и форми на човешка дейност. Предметното съдържание служи на образованието само като средство, като материал за провеждане на обучението.“ [190].

Н. Розов очертава целта на образованието по следния начин „Подготовка за дейности, а следователно и като цел на обучението – усвояване на общи форми и начини на дейност,

изисква от учителя (преподавателя) да умее да вижда общите форми и начини на дейност в този учебен материал, върху които провежда обучението. Дейностният принцип ни задължава, когато формираме образователните програми, разработваме методиките за обучение и организираме учебната дейност да акцентираме на първо място на предметното съдържание, а на *надпредметното* съдържание – върху обобщените дейностни функции, които е длъжно да развива. За съжаление преподавателят често не разбира, че алгебрата се изучава не затова да запомним формулата за определяне корените на квадратно уравнение, а за да се научим да използваме символни обекти, геометрията не се изучава за да помним доказателството на Питагоровата теорема, а за да развиваме геометрическото си въображение. Изучаваме руски език не за това да умеем да прилагаме граматическите правила, а за да се научим да изразяваме мислите си така, че те да се разбират именно така, както ние искаме. Учим физика не за да „зубрим“ закона на Ом, а за да осъзнаем същността на природните закони, както и да умеем да вникваме в същността на явленията, които ни заобикалят. Така ние незабавно преминаваме от предметното съдържание към надпредметното, към дейностното съдържание, към въпроса заради какво ние учим децата? Ето защо, според нас, подборът на предметното съдържание не е свързано с преподавателската представа за „учебния предмет“, а да се свързва, да се влияе, да се определя от надпредметните функции, които трябва да бъдат развити във всеки от обучаемите. Така може да се състави оптимален, обоснован и ясно очертан базис от знания по всеки предмет, който е необходим за развитието на всеки ученик или студент.“ [190].

В почти всички публикации на автора (виж списъка с публикации свързани с темата в края на автореферата) до 2006 година и след това са констатирани и анализирани всички тези характерни особености и пропуски в обучението по математика, които през 2011 година са формулирани и от Н. Розов в [190] по следния превъзходен начин:

„В училищния инкубатор педагозите винаги акцентират на задачата да се преподават само теоретични знания и обучават

изключително с „квази умения”. А ”суровата житейска истина” показва, че несравнимо по-актуална е задачата да се учат умения и да се възпитава желание добре да се работи. ... Сега няколко думи специално за математическото образование в училище. Не е трудно да се убедим, че практически целият училищен курс по математика е зациклен на *пресмятането*. В началния курс това все още търпимо – смятането е общо умение необходимо на всички и за винаги, и затова не предизвиква въпроси, а и при обучението в по-малките класове автоматизма при използване на таблиците за умножение заема централно място. След това следва въвеждане на дробни и операции с тях, което и исторически, и онтогенетически е свързано с усвояването на нова по своята същност дейност – измерване на величини. Именно тази дейност, която би трябвало да бъде централна е изпратена в приложенията или пък е разпръсната из текста на учебниците. Акцентираща се на формалните операции по „пресмятане” с новите обекти, а смисълът на тези операции остава зад кулисите. След това настъпва разцвѣта на алгебричните (а по-късно и тригонометричните) „тъждествени преобразования”, включително и решаване от време на време на умопомрачителни уравнения и неравенства. Макар, че основното предназначение на училищната алгебра е да насади у учениците представа за променливи и произволни стойности, което е още един дейностен пласт, променливата стойност и същността на произволността не се обсъждат в училищния курс. Затова пък е пълно с едни и същи скучни действия, свързани с „пресмятане” в добавка на неразбираеми (като правило и вече досадни) символи. Даже геометрията вместо да запознава с многообразието от красиви форми на заобикалящия ни свят е пълна с много изкуствени и понякога безсмислени изчислителни „геометрични задачи с приложение на тригонометрията”. В крайна сметка, независимо от факта, че човешкото битие категорично изисква такъв важен навик като геометрическо или пространствено въображение, повечето випускници, преминали обучение през горния училищен курс по математика, се оказват напълно лишени от него. ... Сериозно концептуално преустройство изисква и методиката за преподаване на

математика. ... Но работата не е само в това. Днешния обем на познанията за света и обществото, а и едновременно с това състоянието и развитието на компютърните технологии, правят принципно невъзможни и даже абсолютно абсурдни опитите да а се „наблъскат в паметта” всевъзможни, дори достатъчно важни „информационни единици”. Интернет ресурсите днес направиха мигновено достъпни практически всички формули, факти, цитати, справки. Умелото използване на този ресурс естествено вплетен в образователния процес, показва степента на съвременност на неговата организация. Още повече, че по време на единните държавни изпити „образователното ръководство” не разрешава да се използва не само Интернет, но и популярни справочници, калкулатори и правописни речници (т.е. тези работни инструменти, които сега са неотделима част от процеса на труда). Методическата наука е голям длъжник и пред учителството. При нея се забелязва практически пълно откъсване от реалната училищна практика, засилване на формализма и напразно теоретизиране, удивително дребнотемие, изобилие от наукообразни тестове, написани при това на „птичи език”. Например, какво полезно може да извлече практикуващ учител от следния пасаж на методическо указание: „Методологическата основа на системното моделиране на съдържанието на математическото образование е дидактически синтез на цялото, осигуряващо структурната връзка на съдържателните единици, не само в рамките на този етап на подготовка, но и предопределящи взаимовръзката на структурните срезове при придвижването по етапите”? [190]

От изложеното дотук назрява идеята за реализация на едно ново обвързване на училищната математика с математиката във висшето училище. Ролята на училищната математика в това обвързване би следвало да е подчинена на висшата математика, но в същото време тя е и определяща за съответните курсове във висшето училище.

Кратко изложение на дисертационния труд

Глава първа е посветена на психолого-педагогическите и методическите аспекти на обучението по математика, на редица не решени проблеми, варианти на евентуални решение, които са потърсени и представени във втора глава.

Едно остаряло разбиране е тезата, че дидактическите принципи произхождат от практиката и натрупания педагогически опит.

- 1) Принцип на достъпност;
- 2) Принцип на научност;
- 3) Принцип на възпитание;
- 4) Принцип на нагледност;
- 5) Принцип на съзнателност и активност;
- 6) Принцип на трайност на знанията;
- 7) Принцип на систематичност и съзнателност;
- 8) Принцип на индивидуален подход.

Невъзможно е извлечените от опита принципи да служат като ръководство за самия него. Както е отбелязано в [179], твърде едностранчиво е психологическия, биологичния, кибернетичния и др. подходи към дидактическите принципи да се разглеждат едностранно.

При обосноваването на дидактическите принципи трябва да се използва комплексен подход, при който те се извеждат от целите на обучението, от неговото съдържание, а също и от възрастовите познавателни възможности на учениците.

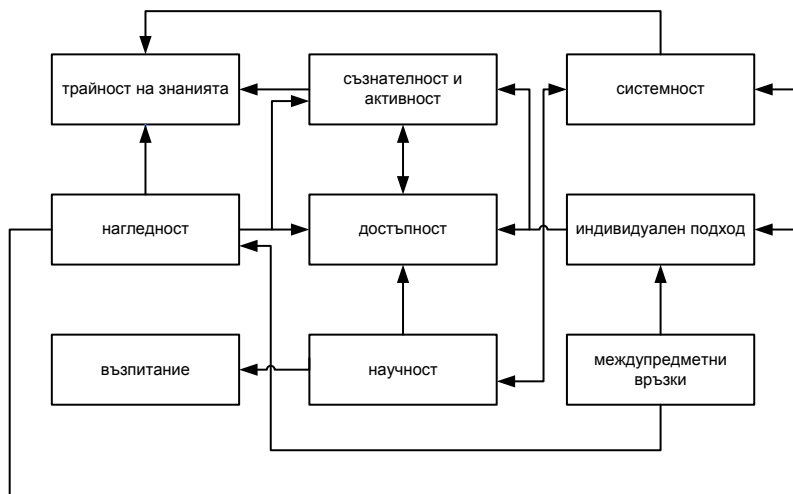
Например принципът за научност, който се реализира основно от учителя, не касае само подбора на съдържанието на образованието и обучението. *„Така се подценява операционално-технологическата страна на обучението, при което усвояването на научни знания не се съпровожда с овладяване на научни методи за познание и дейност”* [179]. Нагледността не бива да се свежда само до емпиричното, сетивното и конкретното. Процесът на математическото познание е

движение от емпиричната и сетивната конкретност към абстракциите и от тях - към научната и мисловна конкретност.

Предложените в Глава 2 учебно съдържание и технологии се опитват да намерят онзи оптимален баланс между конкретното и абстрактното в познавателния процес. При това в психолого-педагогически аспект се търси не само външната нагледност, а и нейното вътрешно проявление – способността за успешна актуализация на наличните представи и тяхното динамично комбиниране.

Безспорният дидактически принцип за трайно овладяване на знанията, уменията и навиците е изключително важен. Ние считаме, че направеното в Глава 2 предложение за „отказ“ от прекалена математическа прецизност, използването на непълни доказателства и преподаването на идеи влияе изключително позитивно при реализацията на този принцип

Дадената по-долу схема на взаимовръзките между дидактическите принципи отразява по-важните и директни корелации за влиянието на един принцип върху останалите.



Дидактическите принципи на обучението, като съвкупност на единни изисквания обаче предполагат различни

акценти, произтичащи от спецификата и естеството на съответното математическо съдържание.

Ето защо смятам, че е възможно добавянето на още един принцип при обучението по математика – принцип на междупредметните връзки (виж схемата, дадена по-долу). Този принцип пряко и силно влияе върху нагледността, а от там - и на съзнателността, активността и достъпността. Не на последно място, този принцип влияе и върху индивидуалния подход – профилен, по възможности, по интереси и др. Не е нормално 6 учебни часа да се учат правила за намиране на производни и накрая, завършвайки средно образование, ученикът да не знае коя е първата производна на пътя S .

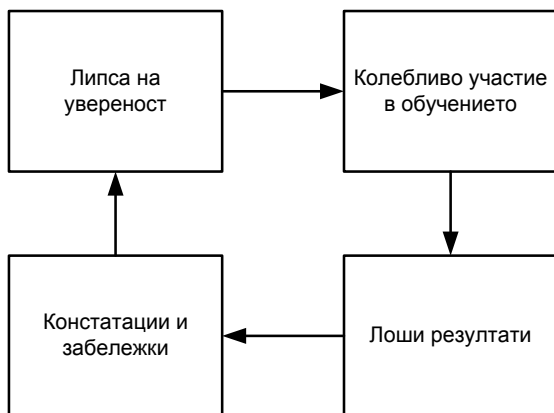
Предложеното учебно съдържание в Глава 2 е подбрано така, че дава изключително добри възможности да се „пренебрегва” принципът на системност. Това, разбира се, се отнася за теория на графите, теория на числата и някои теми от дискретното оптимизиране.

Без претенцията, че предложеният модел на учебно съдържание в Глава 2 решава посочените по-горе глобални проблеми, при неговия подбор се придържахме към гореказаното и към следните принципи, формулирани от Г. В. Дорофеев, които трябва да се спазват при избора на учебно съдържание.

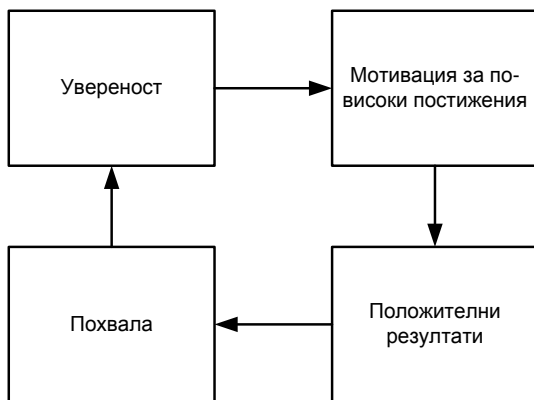
- Познавателен, информационен и интелектуален обем;
- Възможност за вътрешнопредметни и междупредметни връзки;
- Приемственост;
- Вариативност на реализацията;
- Социална ефективност.

Всички разработени теми са придружени от съответни методически указания, дадени са идеи за междупредметни връзки. Темите са разработени на базово (основно) ниво и/или на по-високо – второ ниво.

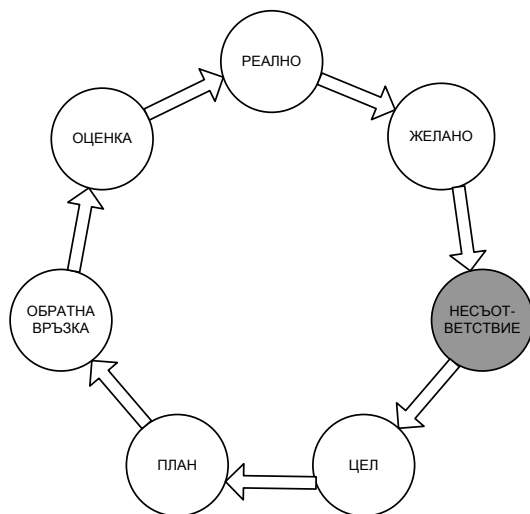
Акцент е поставен и на психологическите аспекти за стимулиране и мотивиране на активността и самостоятелността на учениците, което е предпоставка за формиране на психичните им качества. Този подход сам по себе си е отказ от закостенялото разбиране за ролята на учащия в учебния процес. Предвидена е връзката между емоции и постижения.



Отрицателен цикъл (демотивация)



Положителен цикъл (мотивация)



Цикъл на ефективно учене и промяна

В предлаганата концепция са използвани теориите на видни психолози като Жан Пиаже, който има много голям принос за изучаването на детското познавателно развитие. Също така са интерпретирани постановките на психолозите Галперин, Рубинщайн, Виготски (за двете зони на развитие), Леонтиев.

Субектът на обучение е разгледан многопластово – от една страна се търсят психичните особености, а от друга се разкриват взаимовръзките със социума и училището.

Разгледаната типологизаторската психологическа теория на Майерс – Брикс, за това как хората действат в ежедневието си сочи, че на тази база трябва да се гради обучението и отношението на учителя и преподавателя към ученика и студента.

Типовият индикатор е основан на следните четири „измерения“ на личностните предпочитания. [25]

1. Откъде се черпи енергия (екстроверт срещу интроверт).
2. Какво привлича вниманието (усещащ срещу интуитивен).

3. Как се взимат решения (мислител срещу чувстващ).
4. Подход към живота (преценяващ срещу възприемащ).

1. Енергичност

Екстревърт (Е)	Интроверт (И)
● Външен ● Доверие, насочено навън ● Склонност към говорене ● Широта ● Хора, вещи ● Взаимодействие ● Действие ● Прява-мисля-прява	● Вътрешен ● Притегляне навътре ● Съхраняване ● Дълбочина ● Идеи, мисли ● Концентрация ● Размисъл ● Мисля-прява-мисля

2. Осезание (перцепция)

Усещане (У)	Интуиция (И)
● Петте сетива ● Какво е реално ● Практичност ● Настояще ● Факти ● Съществуващи умения ● Полезност ● Стъпка по стъпка	● Шесто чувство ● Какво може да стане ● Теоретичност ● Бъдеще ● Хрумвания ● Нови умения ● Новости ● Обикаляне в кръг

3. Вземане на решения

Мислене (М)	Чувстване (Ч)
● Глава ● Логична система ● Обективност ● Справедливост ● Критичност ● Принципи ● Разсъдливост ● Твърд, но почтен	● Сърце ● Ценностна система ● Субективност ● Милосърдие ● Похвала ● Хармония ● Безразличие ● Състрадателен

4. Ориентация към външния свят

Преценяване (П)	Възприемане (В)
● Плановост ● Редовност ● Контрол ● Установеност ● Управление на живота ● Поставяне на цели ● Решителност ● Организираност	● Спонтанност ● Прилив ● Приспособяване ● Пробващ ● Нека животът си тече ● Събиране на данни ● Откритост ● Гъвкавост

Типов индикатор на Майерс-Бригс [25]

В процеса на обучение обектът и субектът сменят своите роли и субектът също се учи и получава знания в процеса на обучение. Изключително важно за преподавателя е да определи различните индивидуални стилове на обучаемите, за да помага на различните по интереси и способности ученици да работят заедно. Това гарантира на практика индивидуален подход при обучението.

Съобразяването с предпочитанията, възможностите и волевите качества на личността е изключително важно средство за прилагане на индивидуален подход и мотивация на обекта на обучение. Задължително е при доброто обучение да се използват такива взаимодействия с обучаваните, които съвпадат с тяхната готовност и способности да изпълняват определени дейности. В зависимост от нивото на знания, умения и воля на обучавания преподавателят може да избере съответния правилен подход, който ще му гарантира ефективност и оптималност:

- при ниски нива на знания, умения и воля най-логично е да се акцентира и използва ръководната роля на учителя и обучението да се извършва с активното участие и намеса на преподавателя;

- при ниски нива на знания и умения, но наличие на силна воля, обучаваният трябва да бъде упътван и непрекъснато подпомаган от обучаващия;

- при високи нива на знания и умения, но липса на воля, обучаваният трябва непрекъснато да бъде мотивиран по подходящ начин;

- при високи нива на знания и умения и наличие на силна воля преподавателят трябва да осигури подходяща среда за самообучение и да делегира права (отговорности) за самостоятелно „учене”.

Много е важно в цикъла, който представлява обучението, преподавателят по всяко време да знае какво мотивира най-много обучаваните, правилно да определи нуждите им от подкрепа или тренинг и внимателно и непрекъснато да работи върху поощренията, похвалите и тактичните констатации и забележки.

Глава втора съдържа предложени от автора два модела на учебно съдържание, експериментирани и апробирани в ПМФ на ЮЗУ “Н. Рилски” и училища в Благоевград и региона.

Модел на учебно съдържание по теория на числата (за висшето училище)

Тема 1. Делимост на числата.

- 1.1. Основни понятия и теореми.
- 1.2. Деление с остатък. Най-голям общ делител.
Алгоритъм на Евклид.
- 1.3. Взаимно прости числа. Най-малко общо кратно.
- 1.4. Прости и съставни числа. Разлагане на прости множители.
- 1.5. Верижни дроби.

Тема 2. Някои по-важни функции в теория на числата.

- 2.1. Функциите $[x]$ и $\{x\}$.
- 2.2. Мултипликативни функции. Функцията сума на $f(n)$.
- 2.3. Функция на Ойлер.

Тема 3. Сравнения.

- 3.1. Основни понятия.
- 3.2. Свойства на сравненията.

3.3. Пълна и редуцирана система остатъци.

Теорема на Ойлер и Ферма.

Тема 4. Сравнения с едно неизвестно.

4.1. Основни понятия.

4.2. Сравнения от първа степен.

4.3. Системи сравнения от първа степен с едно неизвестно.

4.4. Сравнения от произволна степен при прост модул.

Теорема на Уилсън.

4.5. Сравнения при произволен модул.

Тема 5. Сравнения от втора степен. Теория на квадратичните остатъци.

5.1. Основни понятия.

5.2. Символ на Лъожандър. Свойства.

5.3. Критерий на Ойлер. Пресмятане на $\left(\frac{-1}{p}\right)$.

5.4. Пресмятане на $\left(\frac{2}{p}\right)$ и $\left(\frac{-2}{p}\right)$.

5.5. Закон на Гаус за реципрочност на квадратичните остатъци.

5.6. Пресмятане на $\left(\frac{3}{p}\right)$, $\left(\frac{-3}{p}\right)$ и $\left(\frac{5}{p}\right)$.

5.7. Символ на Якоби. Свойства. Обобщение на закона за реципрочност.

5.8. Сравнения от втора степен при съставен модул.

Тема 6. Примитивни корени и индексно смятане.

6.1. Показател на цяло число по модул n .

6.2. Примитивни корени.

6.3. Индексно смятане. Приложения.

6.4. Степенни остатъци. Биномни сравнения.

Тема 7. Диофантови уравнения.

7.1. Диофантови уравнения от първа степен. Основни понятия.

7.2. Диофантови уравнения от първа степен с две неизвестни.

- 7.3. Диофантови уравнения от първа степен с произволен брой неизвестни.
- 7.4. Представяне на целите числа като суми от цели квадрати.
- 7.5. Диофантови уравнения от втора степен.

Модел на учебно съдържание по Графи. Оптимизационни алгоритми в мрежи (за висшето училище)

1. Теория на графите. Алгоритмичен подход.

Тема 1.1. Основни понятия в теория на графите.

Тема 1.2. Видове графи. Подграф. Операции с графи. Дървета.

Тема 1.3. Свързаност. Покриващи дървета. Разрези. Цикли.

Силна свързаност.

- 1. Свързаност.
- 2. Дървета.
- 3. Разрези и цикли.
- 4. Силна свързаност.

Тема 1.4. Матрично представяне на графи.

- 1. Матрица на инцидентност.
- 2. Матрица на съседство.
- 3. Матрица на достижимост.
- 4. Матрица (вектор) на степените.
- 5. Матрици на циклите и разрезите.

Тема 1.5. *K*-свързани графи. Сдвоявания. Покрития.

- 1. Ребрена и върхова *k*-свързаност.
- 2. Теорема на Менгер.
- 3. Съчетания по двойки (Сдвоявания).
- 4. Сдвоявания в биполярни графи.
- 5. Сдвоявания в произволни графи.
- 6. Ребрени покрития в графи.
- 7. Върхови покрития в графи.

Тема 1.6. Ойлерови и Хамилтонови графи.

- 1. Ойлерови графи.
- 2. Хамилтонови графи.

Тема 1.7. Планарни и двойствени графи. Оцветявания.

1. Планарни графи.
2. Формула на Ойлер.
3. Характеризация на Куратовския – Понтрягин за планарност.
4. Характеризация на Вагнер, Харари и Тат за планарност.
5. Характеризация на Маклейн.
6. Двойствени графи.
7. Оцветявания.
8. Оцветявания на върховете.
9. Ребрено оцветяване. Хроматичен индекс.

Тема 1.8. Алгоритми за анализ на графи.

1. Машинно представяне на графи.
2. Търсене в дълбочина.
3. Търсене в ширина.
4. Принципи за търсене в дървото на решенията.
5. Използване на граници.
6. Търсене с връщане назад.

2. Оптимизационни алгоритми в графи и мрежи.

Тема 2.1. Оптимизационни задачи. Линеен оптимизиране.

1. Моделиране.
2. Типични класове оптимизационни задачи.
3. Задача на линейното оптимизиране.
4. Канонична задача. Базис на опорен план.
5. Симплекс-метод.
6. Алгоритъм на симплекс-метода. Симплекс-таблици.
7. Симплекс-метод с изкуствен базис (*M*-задача).
8. Дуална задача. Основна теорема на линейното оптимизиране.
9. Теорема за двойственост.
10. Математически модел на транспортната задача
11. Свойства на транспортната задача.
12. Цикъл. Връзка между векторите на условията и циклите.
13. Свойства на опорните планове.
14. Намиране на начален опорен план.
15. Методи за решаване на транспортната задача.
16. Критерии за оптималност на опорен план.

17. Транспортни задачи от отворен тип.
18. Едновременно отчитане на транспортни и други разходи по производство.
19. Транспортна задача със забрани.
20. Транспортна задача по критерий време.
21. Приложения на транспортната задача.
22. Дуалност при транспортната задача. Метод на потенциалите.

Тема 2.2. Алгоритми за построяване на покриващи дървета.

1. Алгоритъм за построяване на покриващо дърво.
2. Алгоритъм за построяване на максимален ориентиран лес (МОЛ).

Тема 2.3. Алгоритми за търсене на пътища.

1. Най-кратък път (Н КП) между два дадени върха s и t . Алгоритъм на Дийкстра.
2. Алгоритъм на Форд за Н КП.
3. Алгоритми за търсене на всички Н КП. Алгоритми на Флойд и Данцинг.
4. Алгоритъм за търсене на K -ти по дължина пътища между два върха s и t .
5. Задачи, свеждащи се до търсене на Н КП – път с най-голяма пропускателна способност и най-надежден път.

Тема 2.4. Сложност на алгоритми и задачи.

1. Някои класове на сложност – NP, NPC, NPI и NPH.
2. Анализ на изчислителната сложност на някои алгоритми.

Тема 2.5. Потоци в мрежи.

1. Алгоритъм за търсене на увеличаваща (потока) верига.
2. Алгоритъм за търсене на максимален поток (Алгоритъм на Форд-Фалкерсон).
3. Модификация на Едмондс и Карп.
4. Алгоритъм за търсене на максимален поток при няколко източника и стока.
5. Алгоритъм за търсене на поток с минимална стойност (Форд-Фалкерсон).
6. Алгоритъм на дефекта.
7. Динамични потоци в мрежи.

Тема 2.6. Мрежово планиране и управление.

1. Метод за намиране на критичен път.
2. Топологическа сортировка на върховете в ориентирани ациклични графи.
3. Разчет на най-ранните срокове за настъпване на събития.
4. Разчет на най-късните срокове.
5. Проекти с минимална стойност.
6. Обобщени мрежови графици.

Тема 2.7. Разполагане на обекти.

1. Търсене на центрове.
2. Търсене на медиани.

Тема 2.8. Оптимални сдвоявания и покрития.

1. Оптимални сдвоявания в биполярни графи.
2. Унгарски алгоритъм.
3. Оптимални сдвоявания в произволни графи.
4. Оптимални покрития в графи.

Тема 2.9. Алгоритми за задачи от тип CPP.

1. CPP в неориентиран граф $G = (X, A)$.
2. CPP в ориентиран граф $G = (X, E)$.

Тема 2.10. Алгоритми за задачи от тип TSP.

1. Задачи от тип TSP.
2. Методи за решаване на TSP. Долни граници.
3. Branch-and-bound алгоритми за TSP.

На базата на университетските курсове четени в ЮЗУ „Неофит Рилски“ и цитирани по-горе, в Глава втора е предложен един конкретен модел на учебно съдържание за извънкласна работа по математика в основното и средното училище. Предложеният вариант може да бъде използван вариативно в зависимост от спецификата на училището, нивото на знанията и уменията на учениците по математика, както и да бъде допълван и обогатяван с други теми.

Търсейки възможност училищната математика да бъде обвързана с математиката във висшето училище, както и с други теми от областта на естествените науки, икономиката и

инженерните науки, стигнахме до извода, че „Теория на числата“, „Теория на графите“ и „Математическото моделиране и оптимизиране“ са най-благодатни области за поставената цел.

Нещо повече, стана ясно, че подобен подход е осъществим и при много други теми от училищния курс, напр. симетрични полиноми. Затова направените предложения в труда могат да се разглеждат като конкретизации на общата идея, разбира се след внасяне на необходимите корекции във формулировките. Идеята за аналогия и обобщаване води естествено до осъзнаване на необходимостта и целесъобразността от създаването на единна технология за съгласуване на съответните двойки теми от училищния курс и курсовете по математика във висшето училище.

Схемата се състои от следните основни етапи:

1. Определяне на основните понятия от конкретната тема в училищния курс и намиране на мястото им в съответната тема и курс във висшето училище. Ако темата заема важно място в училищния курс, следва да се определят повече дейности във връзка с изучаването ѝ в училище. Времето за тези дейности може да е за сметка на други теми.

2. Избиране на съответни задачи, евентуално занимателни или приложни.

3. Посочване на онези задачи, които са задължителни за следващи занятия.

Модел на учебно съдържание по Алгебра. Теория на числата. Графи. Математическо оптимизиране (за средното училище)

Тема	Област	Подходящ клас	Ниво
I. СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ			
1	Симетрични полиноми на две променливи – дефиниции, основна теорема, формули на Нютон	$9^{та} - 10^{та}$	базово

2	Неравенства на две променливи – <i>неравенства между средно хармонично, средно геометрично, средно аритметично и средно квадратично</i>	$9^{\text{ти}} - 10^{\text{ти}}$	базово
3	Симетрични полиноми на три променливи – дефиниция, основна теорема (без доказателство), формули на Нютон	$9^{\text{ти}} - 11^{\text{ти}}$	базово
4	Симетрични полиноми на три променливи – основна теорема (с доказателство) и приложения	$9^{\text{ти}} - 11^{\text{ти}}$	второ
5	Други тъждества и неравенства – <i>тъждество на Лагранж, неравенства на Коши, Коши- Буняковски и приложения</i>	$9^{\text{ти}} - 11^{\text{ти}}$	второ
6	Решаване на някои екстремални задачи чрез използване на тъждества и тъждествени неравенства	$9^{\text{ти}} - 10^{\text{ти}}$	базово
7	Симетрия в геометрията – <i>доказване на тъждества и неравенства в триъгълника</i>	$9^{\text{ти}} - 11^{\text{ти}}$	базово
8	Симетрия в геометрията – <i>доказване на тъждества, свързани с елементите на тетраедъра</i>	$9^{\text{ти}} - 11^{\text{ти}}$	второ
II. ТЕОРИЯ НА ЧИСЛАТА			
ДЕЛИМОСТ			
9	Делимост на числата	$4^{\text{ти}} - 5^{\text{ти}}$	базово
10	Делимост на числата	$4^{\text{ти}} - 5^{\text{ти}}$	второ
11	Делимост на числата – деление с и <i>без остатък, свойства</i>	$6^{\text{ти}} - 7^{\text{ти}}$	базово
12	Делимост на числата – задачи с <i>повишена трудност</i>	$5^{\text{ти}} - 7^{\text{ти}}$	второ
13	Признаци за делимост на естествени числа	$6^{\text{ти}} - 8^{\text{ти}}$	базово

14	Признаци за делимост на естествени числа	$7^{\text{ми}} - 8^{\text{ми}}$	второ
15	Прости и съставни числа	$6^{\text{ми}} - 8^{\text{ми}}$	базово
16	Прости и съставни числа	$7^{\text{ми}} - 10^{\text{ми}}$	второ
17	НОД, Алгоритъм на Евклид, НОК	$6^{\text{ми}} - 9^{\text{ми}}$	базово
18	НОД и НОК – задачи с повишена трудност	$7^{\text{ми}} - 11^{\text{ми}}$	второ
СРАВНЕНИЯ			
19	Числови сравнения – определение и свойства	$8^{\text{ми}} - 10^{\text{ми}}$	базово
20	Числови сравнения – приложения	$9^{\text{ми}} - 10^{\text{ми}}$	второ
21	Теорема на Ойлер и Ферма	$10^{\text{ми}} - 12^{\text{ми}}$	второ
22	Сравнения от първа степен с едно неизвестно	$7^{\text{ми}} - 9^{\text{ми}}$	базово
23	Сравнения от първа степен с едно неизвестно	$7^{\text{ми}} - 12^{\text{ми}}$	второ
24	Системи сравнения от първа степен с едно неизвестно	$6^{\text{ми}} - 10^{\text{ми}}$	базово
25	Системи сравнения от първа степен с едно неизвестно	$7^{\text{ми}} - 11^{\text{ми}}$	второ
26	Сравнения от по-висока степен с едно неизвестно	$11^{\text{ми}} - 12^{\text{ми}}$	второ
ДИОФАНТОВИ УРАВНЕНИЯ			
27	Диофантови уравнения	$7^{\text{ми}} - 10^{\text{ми}}$	базово
28	Диофантови уравнения	$8^{\text{ми}} - 12^{\text{ми}}$	второ
ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ			
29	Принцип на Дирихле – задачи за доказване /не/съществуването на обекти, притежаващи или не дадено свойство	$4^{\text{ми}} - 7^{\text{ми}}$	базово
30	Принцип на Дирихле – теоремата на Ван-дер-Варден, прилагане в неявен вид	$5^{\text{ми}} - 6^{\text{ми}}$	второ
31	Принцип на Дирихле – решаване на занимателни задачи	$7^{\text{ми}} - 9^{\text{ми}}$	базово
32	Принцип на Дирихле – задачи,	$9^{\text{ми}} - 12^{\text{ми}}$	второ

	давани на математически състезания		
33	Принцип на Дирихле – приложения при задачи от делимост, запознаване с теоремата на Ван-дер-Варден (без доказателство) и някои нейни приложения	10 ^{-ти} – 12 ^{-ти}	второ
III. ГРАФИ			
34	Занимателни задачи и графи в началното училище	3 ^{-ти} – 4 ^{-ти}	базово
35	Занимателни задачи и графи в началното училище	4 ^{-ти} – 5 ^{-ти}	второ
36	Приложение на графите за решаване на комбинаторни задачи, задачи за магически триъгълници и др.	5 ^{-ти} – 6 ^{-ти}	базово
37	Графи – понятията върхове и ребра на граф, степен на връх; /не/свързан граф, /не/ориентиран граф; цикъл; свойства, свързани с тях, и приложения	5 ^{-ти} – 7 ^{-ти}	базово
38	Графи – някои твърдения от теория на графите и приложения	6 ^{-ти} – 7 ^{-ти}	второ
39	Увод в теория на графите. Основни понятия и твърдения	9 ^{-ти} – 11 ^{-ти}	базово
40	Увод в теория на графите. Основни понятия и твърдения	9 ^{-ти} – 11 ^{-ти}	второ
41	Графи – Ойлерови и Хамилтонови цикли и пътища	8 ^{-ти} – 10 ^{-ти}	базово
42	Лабиринти – път в лабиринт, свойства (на интуитивно ниво)	5 ^{-ти} – 8 ^{-ти}	базово
43	Лабиринти – доказателства на свойства и приложенията им	9 ^{-ти} – 12 ^{-ти}	второ
44	Свойства на пълните графи с цветни ребра и приложения	8 ^{-ти} – 10 ^{-ти}	второ
45	Турнири	9 ^{-ти} – 11 ^{-ти}	базово

IV. МАТЕМАТИЧЕСКО ОПТИМИРАНЕ			
46	Математическо оптимизиране. Математически модели. Някои основни оптимизационни задачи. Линейно оптимизиране – идея, двумерен случай	$9^{та} - 11^{та}$	базово
47	Транспортна задача. Видове транспортни задачи. Разпределителен метод. Задача за назначенията	$9^{та} - 11^{та}$	базово
48	Алгоритми за търсене на покриващи дървета	$9^{та} - 10^{та}$	базово
49	Алгоритми за търсене на покриващи дървета	$9^{та} - 11^{та}$	второ
50	Алгоритми за търсене на най-кратки пътища – Дийкстра, Форд и Флойд	$9^{та} - 11^{та}$	базово
51	Алгоритми за търсене на най-кратки пътища – Дийкстра, Форд и Флойд	$10^{та} - 11^{та}$	второ
52	Задача за китайския пощальон	$9^{та} - 10^{та}$	базово
53	Задача за китайския пощальон	$10^{та} - 11^{та}$	второ
54	Задача за търговския пътник	$10^{та} - 11^{та}$	базово
55	Задача за търговския пътник	$11^{та} - 12^{та}$	второ
56	Потокови алгоритми – максимален поток	$10^{та} - 11^{та}$	второ
57	Потокови алгоритми – поток с минимална цена	$11^{та} - 12^{та}$	второ
58	Мрежово планиране и управление, разчет на най-ранните и най-късните срокове. Метод на критичния път	$10^{та} - 11^{та}$	базово
59	Приложения на алгоритмите за най-кратки пътища - най-голяма пропускателна способност, най-надежден път, търсене на главен център в граф.	$11^{та} - 12^{та}$	второ

60	Приложения на потоковите алгоритми – съвършени и максимални по мощност и тежест съвоявания	11 ^{-ти} – 12 ^{-ти}	второ
----	---	---------------------------------------	-------

61 Изследване на пространствената структура на белтъците студенти второ

В Глава трета е направен анализ на резултатите от педагогическия експеримент. Дадено е описание на експеримента, сравнителен анализ на емпиричните данни и анализ на резултатите от анкетните проучвания.

Процесът на обучение и отношението към него са изследвани посредством система от взаимнообвързани индикатори. Условно те могат да бъдат разделени в поне пет групи.

1. Индикатори за начина на организация на учебния процес:

- Систематизираност и достъпност в поднасянето на учебния материал;
- Използване на разнообразни и подпомагащи обучението материали;
- Възможност за дискусии и за създаване на творческа обстановка.

2. Индикатори за отношението „преподавател - ученик“:

- Поддържане на обратна връзка;
- Такт и коректност при общуването;
- Безпристрастност.

3. Индикатори за оценка от страна на учениците на професионалната подготовка на преподавателите:

- Наличие на ерудиция;
- Научна култура;
- Преподаване на нови знания в съответната област.

4. Въпроси, свързани с отношението на учениците към математиката:

- Възможности за подобряване на обучението.

5. Въпроси, свързани със самите ученици:

- познания по чужд език и компютри;

- среден успех;
- участие и активност в учебния процес.

Всеки един индикатор, оформен като съждение, е оценяван по пет степенна скала:

1. „Категорично да”;
2. „По-скоро да”;
3. „Не знам”;
4. „По-скоро не”;
5. „Категорично не”.

Емпиричните резултати потвърждават, без да доказват, възможностите на предложените технологии и на другите изводи, направени на базата на съдържателни тълкувания на предлаганите модели. Използваната статистика е описателна и няма за цел да доказва научната достоверност и адекватност.

Приложени са резултати от емпирично анкетно проучване на мнението за обучението по математика на 2288 ученици и 97 учители от 17 училища в Благоевград, Враца и Видин. В същото време се установява силна връзка между тях.

Разбира се някои от решенията могат да бъдат дискутирани, други очакват допълнителна методическа проверка и собствена педагогическа обосновка.

По-подробна информация се съдържа в Приложение 1 и 2.

В **Глава четвърта** са разгледани методическите, организационните и управленските дейности, осигуряващи качеството на обучение. Сериозно внимание е обърнато на понятието *качество*, което се разглежда като „непрекъснато усъвършенстване, за което не съществува горна граница.

Направен е анализ на нормативната база на висшето образование, открити са някои проблеми, посочени са и пътища за тяхното преодоляване. Разгледани са редица въпроси, свързани с подбора на студенти и усъвършенстване организацията за техния прием, както и разпределението им по специалности. Изготвянето на учебните планове и програми, тяхното одобряване, практическото обучение на студентите, правилата за определяне на работната заплата, учебните разписи, административното и

информационното обслужване са анализирани в дисертационния труд в контекста на гарантиране на качеството на обучение. Направен е изводът, че **методиката на обучение все повече се превръща в методика на организиране на самостоятелната работа на студента и ученика.**

Проучени са практиките и опитът, свързани с осигуряване качество на обучението относно методиката, организацията и управлението.

Авторът счита, че разгледаните проблеми и получените резултати в изследването са изключително актуални в контекста на новите изисквания, предявявани към обучението по математика, произтичащи от промени в нормативната база, свързани с:

- ▶ идеята да се съхранят редица положителни форми, методи и средства за обучение, традиционни за българската образователна система;
- ▶ идеята да се осигури „съвременно математическо образование”, като към класическия, традиционен модел на учебно съдържание по математика се приложат съвременни методи и подходи на обучение;
- ▶ идеята методиката на обучение все повече да се превръща в методика на организацията на това обучение – организация на самостоятелната работа, осигуряване на материали, осигуряване на системи за наблюдение, оценяване и контрол на знанията, уменията и компетентностите на учениците и студентите и други.

Приноси

1. Проектирани и публикувани от автора за нуждите на студенти са [19], [82], [87] и [134]. Посочените учебници са добра основа, предлагаща нов модел на учебно съдържание и технология за обучение по „Теория на числата”, „Теория на графите” и „Дискретно

- оптимизиране”, за студенти от различни специалности на Природо-математическия и други факултети;
2. В качеството си на ръководител-катедра авторът е участвал в разработването и утвърждаването на новите учебни планове, в които са включени тези математически дисциплини. В това число и дисциплината „Алгоритми и задачи в извънкласната работа”, предназначена за обучаеми от следдипломна квалификация за придобиване на педагогическа правоспособност.
 3. Разработени и внедрени са от автора действащи към момента учебни програми за обучение на студенти по гореспоменатата тематика на ПМФ и други факултети на ЮЗУ „Неофит Рилски”. Тази учебна документация съдържа необходимите методически указания, необходимите правила за наблюдение, оценяване и контрол, както и необходимите дейности, свързани с организацията на обучението.
 4. Проектиран и експериментиран е модел на учебно съдържание за извънкласна работа по математика в средното училище, като е предложена технология за обучение. Адаптирани за нуждите на средното училище са теми от споменатите области на математиката, като са дадени разработки на конкретни теми със съответните методически указания (виж Глава 2, както и [44],[55],[111], [132]).
 5. Създаден е екип, в който под ръководството на автора съвместно с докторантите Б. Юруков, З. Алексов, М. Кацарска и базови учители от Югозападна България продължава да се работи по проектирането, дизайна, експериментирането и внедряването на нови теми от този проект.
 6. Направено е проучване, диагностика и анализ на съществуващи педагого-психологически, дидактически и методически теории и литература по въпроси, касаещи обучението по математика. Изследвани и проучени са традициите, „добри” и „лоши” практики и опит,

свързани с осигуряване качество на обучението. Те са използвани като индикатор, регулатор и база при осъществяването на този нов образователен модел (виж Увод, Глава 1 и Глава 4).

7. Осъществен е педагогически експеримент във висши и средни училища (виж Глава 3 и Приложения). Резултатите от експеримента са използвани като обратна връзка и регулатор за актуализиране на модела на учебно съдържание и образователната технология.
8. Направено е анкетно проучване с ученици, студенти и преподаватели по въпроси, касаещи методиката, организацията и управлението на обучението по математика (виж Глава 3 и Приложения).
9. Като дългогодишен преподавател и администратор в ЮЗУ „Неофит Рилски”, авторът пряко е участвал в проектирането и внедряването на учебна документация и системи, осигуряващи качество на обучението (виж приложения списък с публикации и Глава 4):
10. разработка на системи за наблюдение, проверка и оценяване на знанията, уменията и компетентностите на студентите на ниво университет, специалност и учебен курс;
11. разработка на системи за натрупване и трансфер на кредити, тясно свързани с осигуряване и обезпечаване на качество на обучението;
12. проектиране и разработка на информационни системи за обезпечаване качеството на обучение и административните дейности, свързани с неговата организация.
13. Успешно са защитени под ръководството на автора две докторски дисертации (Б. Юруков, З. Алексов), предстои защита на дисертацията на докторант М. Кацарска. Разработени и защитени са повече от тридесет дипломни работи и проекти, свързани с това изследване.
14. Резултатите от изследването, конкретните разработки на темите от предложеното учебно съдържание със съответните методически указания и препоръчителна

литература за всяка от темите могат успешно да се прилагат на практика при организирането на обучението по математика както във висшите, така и в средните училища (виж Глава 1 и Глава 2). Освен това резултатите от това изследване могат да се използват като индикатор и актуално експертно мнение от специалисти в МОН и ръководители на висши и средни училища при проектирането, актуализирането и налагането на нови стандарти в обучението (виж Глава 3, Глава 4 и Приложения).

Отворени проблеми

Направеното изследване, осъществено основно в рамките на последните десет години, е добра основа за продължение и търсене на проекции в следните посоки:

- ▶ възобновяване на традицията за съществуване на аудиторни (класни) и извънаудиторни (извънкласни) форми на обучение по математика - кръжоци, разработка на реферати, дипломни и курсови проекти, семинари, летни школи, консултации и други. По този проблем вече реално се работи с базови учители и учители от СДК в Югозападна България;
- ▶ обезпечаване на извънаудиторните (извънкласните) форми на обучение с необходими материали за самостоятелна подготовка. Трябва да продължи и да бъде завършена подготовката, конкретната разработка и експериментирането на всички теми от предложения модел на учебно съдържание;
- ▶ създаване и функциониране на организирани форми за системно обучение по математика на ученици в рамките на ПМФ на ЮЗУ „Неофит Рилски”, като се използват традицията и успешният опит, създаден и прилаган от Съюза на математиците в България.

Списък на публикации свързани с дисертационния труд

1. [19] Мирчев, Ив., Графи. Оптимизационни алгоритми в мрежи, Унив. изд. „Н. Рилски”, Благоевград, 2001.
2. [44] Мирчев, Ив., М. Кацарска, Използване на нестандартни подходи при решаване на задачи по математика в началното училище, сп. Начално училище, 2006.
3. [45] Мирчев, Ив., З. Алексов, Interactive environment for distance learning, Сборник доклади, International Conference on mathematics education, Свищов, 2005, 312-317.
4. [46] Mirchev, Iv., Z. Aleksov, Software tools for building the web-based distance learning systems. Approaches and comparison, International scientific conference FMNS, Blagoevgrad, 2005.
5. [47] Mirchev, Iv., Z. Aleksov, Software tools for building the web-based distance learning systems. Approaches and comparison, III congress of Mathematicians of Macedonia, Mathematical society of Macedonia (Abstracts), Struga, 2005, 12.
6. [48] Мирчев, Ив., З. Алексов, Учителите - значими фактори в процеса на компютризация на образованието, Scientific Research (Electronic Issue), Volume 4, SWU “Neofit Rilski”, Blagoevgrad, 2005.
7. [49] Мирчев, Ив., З. Алексов, Computer-based model for Teaching and Learning Discrete Mathematics, 7-th International Conference on Discrete Mathematics and Applications (ICDMA7), Банско, 2004, 147-156.
8. [50] Мирчев, Ив., З. Алексов, Приложения на хамилтонови вериги и цикли, сп. Математика плюс, бр.1, 2004, 62-65.
9. [51] Мирчев, Ив., Optimizacion Algorithms at the Upper-secondary School Level, International congress MASSEE 2003, Боровец, 2003, 107-113.

10. [52] Мирчев, Ив., З. Алексов, Елементи от теория на графите в извънкласната работа в средните училища, Доклади на XXXII Пролетна конференция на Съюза на математиците в България, 2003, 374-380.
11. [53] Мирчев, Ив., К. Калинов, Б. Юруков, Покриващи дървета в графи, Доклади на XXXII Пролетна конференция на СМБ, 2003, 407-412.
12. [54] Мирчев, Ив., К. Калинов, Б. Юруков, Потоци в графи и мрежи, Сб. доклади на XXX Пролетна конференция на Съюза на математиците в България, 2001, 411- 417.
13. [55] Мирчев, Ив., Б. Юруков, К. Калинов, Търсене на оптимални пътища, сп. Математика, бр. 2, 2001, 2-6.
14. [56] Мирчев, Ив., Изчисляване на детерминанти, сп. Млад конструктор, бр. 1, Приложение XV, 1986.
15. [57] Мирчев, Ив., Персоналният компютър – средство за интензификация, индивидуализация и подобряване качеството на учебния процес, 40 години соц. образование в НРБ, ВПИ – Благоевград, 1986, 145-147.
16. [58] Мирчев, Ив., Програма "Кои лампи светят", сп. Млад конструктор, бр. 1, Приложение III, 1986.
17. [59] Чимев, К., Ив. Мирчев, Идеологизация на обучението по математика във ВУЗ, сп. Проблеми на висшето образование, бр. 2, София, 1986, 38-43.
18. [60] Мирчев, Ив., Някои основни задачи при обучението по линейна алгебра, решими с помощта на компютър, Годишник на ВПИ - Благоевград, том II, кн. 1, 1985, 97-101.
19. [61] Мирчев, Ив., Програмно осигуряване за автоматизирана обработка текущия контрол на студенти, Годишник на ВПИ - Благоевград, том II, кн. 1, 1985, 102-108.
20. [62] Мирчев, Ив., К. Самарджиев, Програмно осигуряване за автоматизация на обслужването и управлението на учебната дейност във ВУЗ, Доклади (микрофилмирани) на Юбилейна научна сесия 40 години ВМЕИ "В. И. Ленин", София, 1985.

21. [63] Мирчев, Ив., Някои бележки върху изучаването на геометрия в нашето училище в епохата на Възраждането, Годишник на ВПИ - Благоевград, том I, кн. 1, 1984, 162-195.
22. [82] Мирчев, Ив., Оптимизиране, Алгоритмичен подход, Университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, 1999.
23. [87] Чимев, К., Ив. Мирчев, Висша математика, Унив. изд. „Н. Рилски“, Благоевград, 1999.
24. [109] Mitova, S., B. Yurukov, Iv. Mirchev, Mathematical Modelling, Optimization Algorithms – Secondary School Course, II Congress of mathematicians and informaticians, August 2000, Abstracts.
25. [111] Юруков, Б., Ив. Мирчев, Проблемен подход в обучението по оптимизиране в средното училище, Международен семинар по кодиране, Ст. Загора, 23-26 ноември, 2000.
26. [132] Мирчев, Ив., М. Кацарска, Модел на учебно съдържание за извънкласна работа по математика. Методически, организационни и управленски аспекти, Стара Загора, 2006.
27. [134] Мирчев, Ив., Теория на числата, Благоевград, 1996.
28. [136] Мирчев, Ив., Б. Юруков, Въведение в програмиране на Бейсик, Благоевград, 1984.
29. [137] Чимев, К., М. Тасев, Ив. Мирчев, Б. Юруков, Ръководство за решаване на задачи по математика, Благоевград, 1986.
30. [138] Чимев, К., М. Тасев, Ив. Мирчев, Б. Юруков, Методическо ръководство за решаване на задачи по математика (второ издание), Благоевград, 1988.
31. [139] Чимев, К., Ив. Мирчев, Ръководство за решаване на задачи по математика, Благоевград, 1992.
32. [140] Chimev, K., Iv. Mirchev, Separable and Dominating Sets of Variables, Blgoevgrad, 1993.
33. [142] Чимев, К., С. Щраков, И. Мирчев, Ръководство за решаване на задачи по математика, част III, Благоевград, 1995.

34. [143] Чимев, К., С. Щраков, И. Мирчев, Ръководство за решаване на задачи по математика, част II, Благоевград, 1995.
35. [144] Чимев, К., С. Щраков, И. Мирчев, Ръководство за решаване на задачи по математика, част I, Благоевград, 1995.
36. [145] Чимев, К., С. Щраков, И. Мирчев, Математика, част I, Благоевград, 1995.
37. [146] Чимев, К., Ив. Мирчев, М. Аслански, Математика, Благоевград, 2006.
38. [152] Попков, Тр., Ив. Мирчев, Проверката и оценяването на студентските постижения в контекста на качеството на образованието, Сб. доклади Трета международна научно-практическа конференция „Конкурентни стратегии във висшето образование”, Правец, 2006.
39. [186] Мирчев, Ив., Съвременното обучение – система от методически, организационни и управленски компоненти, сп. „Педагогика”, год. XVI, бр. 8, 2006.

Цитирана литература

- [1] Березина, Л., Графы и их Применение, Изд. „Просвещение”, Москва, 1979.
- [2] Паунов, М., Мотивация, Унив. изд. „Стопанство”, София, 2001.
- [3] Игнатъев, Е., В царстве смекалки, Изд. „Наука”, Москва, 1981.
- [4] Глейзер, Г., Беседи по история на математиката, Държ. изд. „Народна просвета”, София, 1988.
- [5] Гарднер, М., Математически развлечения, първи том, Изд. „Наука и изкуство”, София, 1975.
- [6] Майника, Э., Алгоритмы оптимизации на сетях и графах, Изд. „Мир”, Москва, 1981.
- [7] Кларнер, Д., Математический цветник (сборник статей и задачи), Изд. „Мир”, Москва, 1983.
- [8] Ганчев, И., К. Чимев, Й. Стоянов, Математически фолклор, Държ. изд. „Народна просвета”, София, 1987.
- [9] Вентцель, Е., Элементы теории игр, издание второе, Государственное издательство Физико-математической литературы, Москва, 1961.
- [10] Ганчев, Ив., Ю. Колягин, Й. Кучинов, Л. Портев, Ю. Сидоров, Методика на обучението по математика от VIII до XI, втора част, София, 1988.
- [11] Николов, П., Мотивация на учебната дейност, Унив. изд. „Н. Рилски”, Благоевград, 1998.
- [12] Дюдни, Х., 525 Главоблъсканици, Държ. изд. „Техника”, София, 1981.
- [13] Олехник, С., Ю. Нестеренко, М. Потапов, Старинные занимательные задачи, Изд. „Наука”, Москва, 1988.
- [14] Леман, И., Увлекательная математика, Изд. „Знание”, Москва, 1985.
- [15] Андрашфай, Б., Т. Бакош, Я. Богнар, М. Богнар, Т. Варга, Т. Галаи, И. Ланци, Ф. Молнер, И. Рейман, А. Рени, П. Ревес, Я. Шурани, Математическа мозайка, Държ. изд. „Техника”, София, 1980.

- [16] Геров, Г., Б. Димитров, Приложна математика за 11 клас (II степен) на ЕСПУ, Държ. изд. „Народна просвета”, София, 1986.
- [17] Сп. Математика плюс, бр.4, 2005, Гл. редактори: Гроздев, С., О. Мушкарров
- [18] Касаткин, В., Необычные задачи математики, Изд. „Радянська школа”, Киев, 1987.
- [19] Мирчев, Ив., Графи. Оптимизационни алгоритми в мрежи, Унив. изд. „Н. Рилски”, Благоевград, 2001.
- [20] Синягина, Н., Ив. Мирчев, И. Дамянов, С. Христов, Защита на компютърната информация, Унив. изд. „Н. Рилски”, Благоевград, 2005.
- [21] Бижков, Г., В. Краевски, Методология и методи на педагогическите изследвания, Унив. изд. „Св. Климент Охридски”, София-Москва, 1999.
- [22] Наков, П., П. Добриков, Програмиране ++ Алгоритми, Изд. „Тор Теат. Со”, София.
- [23] Юруков, Б., Технология за обучение по математическо оптимизиране в средното училище, Дисертация, Благоевград, 2001.
- [24] Алексов, З., Мястото и ролята на компютрите и другите съвременни образователни технологии в обучението по информатика, Дисертация, София, 2004.
- [25] Ландсбърг, М., Първичната сила на обучението, Изд. „Класика и Стил” ООД, София, 2002.
- [26] Афанасьев, В., Ю. Поваренков, Е. Смирнов, В. Шадриков, Подготовка учителя математики: Инновационные подходы, Изд. „Гардарики”, Москва, 2002.
- [27] Пичурин, Л., Воспитание учащихся при обучении математике, Изд. „Просвещение”, Москва, 1987.
- [28] Метельский, Н., Пути совершенствования обучения математике (проблемы современной методики математики), Изд. „Университетское”, Минск, 1989.
- [29] Андреев, М., Дидактика, Държ. изд. „Народна просвета”, София, 1987.

- [30] Колягин, Ю., Г. Луканкин, Е. Мокрушин, В. Оганесян, Л. Пичурин, В. Саннинский, Методика на преподаването по математика в средното училище, Държ. изд. „Народна просвета”, София, 1980.
- [31] Кадыров, И., В заимосвръзка внекласных и факультативных занятий по математике, Изд. „Просвещение”, Москва, 1983.
- [32] Антонов, Н., В. Гусев., Современные проблемы методики преподавания математики, сборник статей, Изд. „Просвещение”, Москва, 1985.
- [33] Пойа, Д., Как да се решава задача (Един нов аспект на математическия метод), Изд. „Народна просвета”, София, 1972.
- [34] Фридман, Л., Психолого-педагогические основы. Обучения математике в школе, Изд. „Просвещение”, Москва, 1983.
- [35] Портев, Л., В. Милушев, Н. Николов, Р. Маврова, Проблемност при обучението по математика, Държ. изд. „Народна просвета”, София, 1983.
- [36] Беелих, К., Х. Шведе, Техника на обучението и на умствения труд, Държ. изд. „Народна просвета”, София, 1987.
- [37] Парслоу, Э., М. Рэй, Коучинг в обучении (Практические методы и техники), Изд. дом „Питер”, 2003.
- [38] Николов, Л., Мотиви на поведение и социални структури, Изд. „Наука и изкуство”, София, 1974.
- [39] Информационен бюлетин на МОН, Управление и организация на науката и висшето образование, Година VI, бр. 3-4, 1999.
- [40] Информационен бюлетин на МОН, Управление и организация на науката и висшето образование, Година VII, бр. 1-2, 2000.
- [41] Кокинов, Б., Б. Тошев и колектив, Управление на качеството във висшето образование: процеси, структури и стратегии, София, 2001.

- [42] Кьосев, Ал., А. Тотоманова и колектив, Университетска автономия и академична отговорност, Изд. „Лик”, София, 1999.
- [43] Сборник материали, Първа Университетска конференция по качество, Проект подобряване управлението на Университета чрез контрола по качеството, Благоевград, 2001.
- [44] Мирчев, Ив., М. Кацарска, Използване на нестандартни подходи при решаване на задачи по математика в началното училище, сп. Начално училище, 2006.
- [45] Мирчев, Ив., З. Алексов, Interactive environment for distance learning, Сборник доклади, International Conference on mathematics education, Свищов, 2005, 312-317.
- [46] Mirchev, Iv., Z. Aleksov, Software tools for building the web-based distance learning systems. Approaches and comparison, International scientific conference FMNS, Blagoevgrad, 2005.
- [47] Mirchev, Iv., Z. Aleksov, Software tools for building the web-based distance learning systems. Approaches and comparison, III congress of Mathematicians of Macedonia, Mathematical society of Macedonia (Abstracts), Struga, 2005, 12.
- [48] Мирчев, Ив., З. Алексов, Учителите - значими фактори в процеса на компютризация на образованието, Scientific Research (Electronic Issue), Volume 4, SWU “Neofit Rilski”, Blagoevgrad, 2005.
- [49] Мирчев, Ив., З. Алексов, Computer-based model for Teaching and Learning Discrete Mathematics, 7-th International Conference on Discrete Mathematics and Applications (ICDMA7), Банско, 2004, 147-156.
- [50] Мирчев, Ив., З. Алексов, Приложения на хамилтонови вериги и цикли, сп. Математика плюс, бр.1, 2004, 62-65.
- [51] Мирчев, Ив., Optimizacion Algorithms at the Upper-secondary School Level, International congress MASSEE 2003, Боровец, 2003, 107-113.

- [52] Мирчев, Ив., З. Алексов, Елементи от теория на графите в извънкласната работа в средните училища, Доклади на XXXII Пролетна конференция на Съюза на математиците в България, 2003, 374-380.
- [53] Мирчев, Ив., К. Калинов, Б. Юруков, Покриващи дървета в графи, Доклади на XXXII Пролетна конференция на СМБ, 2003, 407-412.
- [54] Мирчев, Ив., К. Калинов, Б. Юруков, Потоци в графи и мрежи, Сб. доклади на XXX Пролетна конференция на Съюза на математиците в България, 2001, 411- 417.
- [55] Мирчев, Ив., Б. Юруков, К. Калинов, Търсене на оптимални пътища, сп. Математика, бр. 2, 2001, 2-6.
- [56] Мирчев, Ив., Изчисляване на детерминанти, сп. Млад конструктор, бр. 1, Приложение XV, 1986.
- [57] Мирчев, Ив., Персоналният компютър – средство за интензификация, индивидуализация и подобряване качеството на учебния процес, 40 години соц. образование в НРБ, ВПИ – Благоевград, 1986, 145-147.
- [58] Мирчев, Ив., Програма "Кои лампи светят", сп. Млад конструктор, бр. 1, Приложение III, 1986.
- [59] Чимев, К., Ив. Мирчев, Идеологизация на обучението по математика във ВУЗ, сп. Проблеми на висшето образование, бр. 2, София, 1986, 38-43.
- [60] Мирчев, Ив., Някои основни задачи при обучението по линейна алгебра, решими с помощта на компютър, Годишник на ВПИ - Благоевград, том II, кн. 1, 1985, 97-101.
- [61] Мирчев, Ив., Програмно осигуряване за автоматизирана обработка текущия контрол на студенти, Годишник на ВПИ - Благоевград, том II, кн. 1, 1985, 102-108.
- [62] Мирчев, Ив., К. Самарджиев, Програмно осигуряване за автоматизация на обслужването и управлението на учебната дейност във ВУЗ, Доклади (микрофилмирани) на Юбилейна научна сесия 40 години ВМЕИ "В. И. Ленин", София, 1985.

- [63] Мирчев, Ив., Някои бележки върху изучаването на геометрия в нашето училище в епохата на Възраждането, Годишник на ВПИ - Благоевград, том I, кн. 1, 1984, 162-195.
- [64] Ръководство за осигуряване на качеството на висшето образование във висшите училища в България, проект ФАР БГ 9605.01.001 „Национална агенция за оценяване и акредитация” (р-ли: Р. Пранчов, Д. Билинг).
- [65] Кендеров, П., С. Гроздев, Диференцираното обучение по математика в европейските училища, Доклади на Тридесет и петата пролетна конференция на Съюза на математиците в България (Боровец, 5-8 април), София, 2006.
- [66] Липатов, Е., Математика-Кибернетика (Теория графов и ее применения), Изд. „Знание”, Москва, 1986.
- [67] Сп. Математика плюс, бр. 2, 1999, Гл. редактори: Гроздев, С., О. Мушкарров.
- [68] Ландсбърг, М., Първичната сила на мотивацията (Вдъхновете себе си и другите), Изд. „Класика и стил” ООД, София, 2002.
- [69] Реализираните проекти, качеството на преподаването и европейското измерение в системата на висшето образование в България, Институционалното оценяване и акредитация и ролята им за утвърждаването на българските университети на европейския интелектуален пазар, Издание на Центъра за развитие на човешките ресурси, София, юни 2000.
- [70] Георгиева, М., Графите в обучението по математика в началното училище, Унив. изд. „Св. св. Кирил и Методи”, Велико Търново, 1990.
- [71] Гроздев, С., Теория и практика на подготовката на изявени ученици за участие в олимпиади по математика, Дисертация, София, 2002.
- [72] Christofides, N., Graph Theory. An Algorithmic approach, Academic Press Inc (London) Ltd. 1975, 977 (Кристофидес, Н., Теория графов. Алгоритмический подход, М., „Мир” 1978).

- [73] Swamy, M., K. Thulasiraman, Graphs, Networks and Algorithms, John Wiley & Sons, 1981 (Свами М., К. Тхуласираман, Графы сети и алгоритмы М., „Мир”, 1984).
- [74] Зайченко, Ю. П., Исследование операций, Киев, „Высша школа”, 1988.
- [75] Paradimitriou, Ch., K. Steigeitz, Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity, Prentice-Hall, Inc Englewood Cliffs, New Jersey 1982 (Пападимитриу, Х., К. Стайглиц, Комбинаторная оптимизация, Алгоритмы и сложность, М., „Мир”, 1985).
- [76] Мухачева, Э., Г. Рубинштейн, Математическое программирование, Новосибирск, „Наука”, Сибирское отдел, 1987.
- [77] Harary, F., Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, 1969 (Харари, Ф., Теория графов, М., „Мир”, 1973).
- [78] Фудзислава, Т., Т. Касами, Математика для радионженеров. Теория дискретных структур, М., „Радио и связь”, 1984.
- [79] Ford, L. R., D. R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton Press, Princeton 1962 (Форд, Л. Р., Д. Р. Фалкерсон, Потоки в сетях, М., „Мир”, 1966).
- [80] Йорданов, Й., Количествени методи в управлението, СУ „Св. Кл. Охридски”, Нац. център за дистанц. обучение, София, 1997.
- [81] Иванчев, Д., Г. Неглер, Мрежово оптимирание, Техн. университет, София, 1993.
- [82] Мирчев, Ив., Оптимирание, Алгоритмичен подход, Университетско издателство „Неофит Рилски”, Благоевград, 1999.
- [83] Христов, Г., Р. Калтинска, Математическо оптимирание, част първа, Н. И., 1972.
- [84] Христов, Г., Р. Калтинска, Числени методи 10, Народна просвета, С., 1978.
- [85] Кендеров, П., Г. Христов, Ас. Дончев, Математическо оптимирание, Унив. изд. „Кл. Охридски”, С., 1989.

- [86] Христов, Г. и др., Ръководство за решаване на задачи по математическо оптимизиране, Унив. изд. „Св. Кл. Охридски”, С., 1989.
- [87] Чимев, К., Ив. Мирчев, Висша математика, Унив. изд. „Н. Рилски”, Благоевград, 1999.
- [88] Запрянов, З., Ив. Димовски и др., Математика 12 клас, София, 1992.
- [89] Паскалев, Г., Ив. Тонов и др., Математика 9 клас – факултативна подготовка, НП, София, 1986.
- [90] Чуканов, Вл., Комбинаторика, „Алеф”, НП, София, 1977.
- [91] Андреев, М., Оценяването в училище, Унив. изд. „Св. Кл. Охридски”, София, 1995.
- [92] Андреев, М., Процесът на обучението – дидактика, Унив. изд. „Св. Кл. Охридски”, София, 1996.
- [93] Онишчук, Дидактика современной школе, Киев, 1987.
- [94] Димитров, Б., Н. Янев, Вероятности и статистика, Унив. изд. „Св. Кл. Охридски”, София, 1990.
- [95] Димитров, Б., Е. Карашчанова, Статистика за нематематици, Благоевград, 1993.
- [96] Станев, Ст. и др., Методология и технология за създаване на държавните образователни изисквания, НИО към МОН, София, 2000.
- [97] Пойа, Д., Математическое открытие, Москва, „Наука”, 1976.
- [98] Йорданов, Д., Психология, София, 1975.
- [99] Учебници по математика и информатика.
- [100] Сп. „Информатика и образование”, Изд. „Мир”, Москва, 1991- ...
- [101] Сп. „Математика и информатика”, Просвета, София, 1990- ...
- [102] Сп. „Математика плюс”, София, 1990- ...
- [103] Сп. „Математика”, София, 1990- ...
- [104] Evans, J., E. Minieka, Optimization Algorithms for Networks and Graphs, Marcel Dekker, Inc. New York, 1992.

- [105] Математика и математическо образование, Доклади на 26-ата конференция на СМБ, България, Пловдив, 22-25 април 1997.
- [106] Ганчев, М., С. Попратилов, Кръжочна работа по математика за ученици от 4 и 5 клас, София, 1985.
- [107] Болобаш, Б., Теория на графите, Изд. „Наука и изкуство”, София, 1989.
- [108] Юруков, Б., Една теорема на Ойлер, сп. Математика, бр. 1, 2001, стр. 8-11, МОН.
- [109] Mitova, S., B. Yurukov, Iv. Mirchev, Mathematical Modelling, Optimization Algorithms – Secondary School Course, II Congress of mathematicians and informaticions, August 2000, Abstracts.
- [110] Юруков, Б., Оптимизационни алгоритми в средното училище, Международна конференция „Образованието и предизвикателствата на новото хилядолетие”, Пловдив, 1-3 декември, 2000, 71-75.
- [111] Юруков, Б., Ив. Мирчев, Проблемен подход в обучението по оптимизиране в средното училище, Международен семинар по кодиране, Ст. Загора, 23-26 ноември, 2000.
- [112] Русев, Р., К. Банков, Св. Савчев, Задачи за извънкласна работа по математика, Държ. изд. „Народна просвета”, София, 1986.
- [113] Додунеков, С., Й. Денев, Кодиране на информацията, Държ. изд. „Народна просвета”, София, 1985.
- [114] Конфорович, А., Математика лабиринта, Изд. „Радянська школа”, Киев, 1987.
- [115] Доклад на ЮЗУ „Неофит Рилски” за институционална акредитация, 2005.
- [116] Болтянский, В. Г., Н. Я. Виленкин, Симетрия в алгебре, Наука, Москва, 1967.
- [117] Ганчев, Ив., За математическите задачи, Народна просвета, София, 1971.
- [118] Гаврилов, М., И. Димовски, Съвременна алгебра за учители, част II. Народна просвета, София, 1982.

- [119] Запрянов, Запрян и др., Математика за задължително избираема подготовка в 9-ти клас, Просвета, София, 1995.
- [120] Запрянов, Запрян и др., Алгебра. Учебно помагало за 9-ти клас, Наука, София, 1998.
- [121] Русева Д., Р. Русев, Математическа мозайка, Отечество, София, 1981.
- [122] Леман, Йоханес, Занимателна математика, Народна просвета, София, 1984.
- [123] Минский, Е. М., От игры к знаниям, Просвещение, Москва, 1987.
- [124] Нагибин, Ф. Ф., Е. С. Канин, Математическая шкатулка, Москва, Просвещение, 1984.
- [125] Уфнаровский, В. А., Математический аквариум, Штиинца, Кишинев, 1987.
- [126] Методика факультативных занятий в 7-8 классах, Никольская, И. Л. и др. /составители/, Просвещение, Москва, 1981.
- [127] Гусев, В. А. И др., Внеклассная работа по математике в 6-8 классах, Никольская, И. Л. И др. /составители/, Просвещение, Москва, 1984.
- [128] Смыкалова, Е. В., Дополнительные главы по математике/для учащихся 5 класса/, Санкт-Петербург, СМЮ Пресс, 2005.
- [129] Смыкалова, Е. В., Дополнительные главы по математике/для учащихся 6 класса/, Санкт-Петербург, СМЮ Пресс, 2005.
- [130] Смыкалова, Е. В., Развивающее обучение на уроках математики в 5-6 классах, Санкт-Петербург, СМЮ Пресс, 2005.
- [131] Бъкингам, М., К. Кофман, Нарушете всички правила (Какво по-различно правят добрите мениджъри?), Изд. „Класика и стил“ ООД, София, 2004 (второ издание).
- [132] Мирчев, Ив., М. Кацарска, Модел на учебно съдържание за извънкласна работа по математика. Методически, организационни и управленски аспекти, Стара Загора, 2006.

- [133] Додунеков, С., К. Чакърян, Задачи по теория на числата, Изд. „Регалия 6”, София, 1999 (второ допълнено и преработено издание).
- [134] Мирчев, Ив., Теория на числата, Благоевград, 1996.
- [135] Мирчев, Ив., Отделими и доминиращи множества от променливи на функциите, Дисертация, София, 1990.
- [136] Мирчев, Ив., Б. Юруков, Въведение в програмиране на Бейсик, Благоевград, 1984.
- [137] Чимев, К., М. Тасев, Ив. Мирчев, Б. Юруков, Ръководство за решаване на задачи по математика, Благоевград, 1986.
- [138] Чимев, К., М. Тасев, Ив. Мирчев, Б. Юруков, Методическо ръководство за решаване на задачи по математика (второ издание), Благоевград, 1988.
- [139] Чимев, К., Ив. Мирчев, Ръководство за решаване на задачи по математика, Благоевград, 1992.
- [140] Chimev, K., Iv. Mirchev, Separable and Dominating Sets of Variables, Blagoevgrad, 1993.
- [141] Shtrakov, S., Iv. Mirchev (editors), Discrete Mathematics and Applications, Research in Mathematics, Volume 5, Blagoevgrad, 1995.
- [142] Чимев, К., С. Щраков, И. Мирчев, Ръководство за решаване на задачи по математика, част III, Благоевград, 1995.
- [143] Чимев, К., С. Щраков, И. Мирчев, Ръководство за решаване на задачи по математика, част II, Благоевград, 1995.
- [144] Чимев, К., С. Щраков, И. Мирчев, Ръководство за решаване на задачи по математика, част I, Благоевград, 1995.
- [145] Чимев, К., С. Щраков, И. Мирчев, Математика, част I, Благоевград, 1995.
- [146] Чимев, К., Ив. Мирчев, М. Аслански, Математика, Благоевград, 2006.
- [147] Лекция 2: Принцип Дирихле, <http://narod.yandex.ru/cgi-bin/yandmarkip?cluster=11&progr=0x2757571A&HndlQue...>

- [148] Принцип Дирихле, <http://math.ournet.md/krujok/dirichr/dirichr/.html>
- [149] Принцип Дирихле, <http://vadim-soft.narod.ru>
- [150] Математически олимпиади и олимпиадные задачи, <http://www.zaba.ru/cgi-bin/tasks.cgi?tour=books.ivanov.dirikhle>
- [151] Генкин С. и др., Принцип Дирихле, <http://www.zaba.ru/igi-bin/tasks.cgi?tour=books.mk1.dirikhle&solution=1>
- [152] Попкочев, Тр., Ив. Мирчев, Проверката и оценяването на студентските постижения в контекста на качеството на образованието, Сб. доклади Трета международна научно-практическа конференция „Конкурентни стратегии във висшето образование”, Правец, 2006.
- [153] Лингарт, Й., Процес и структура человеческого учения. Пер. с чешск. Мельцера, Р. Е., М., 1970, с. 28-29.
- [154] Загязинс, Й, В. И. Противоречия учебного процесса и способы их разрешения. – „Советская педагогика”, 1970, № 12, с. 20-29.
- [155] Галанин, Д. Д., Об изменении метода обучения в низшей и средней школе. Труды 1-го Всероссийского съезда преподавателей математики, т. II, Сб., с. 191.
- [156] Флейвелл, Джон Х. Генетическая психология Жана Пиаже. Пер с англ. М., 1967.
- [157] Адлер, М. О., Некоторых педагогических аспектах теорий Ж. Пиаже и Дж. С. Брунера. – Сб. Педагогика и школа за рубежом, вып. 6, М., 1969, с. 47.
- [158] Рубинштейн, С. Л. Основы психологии. М., 1946.
- [159] Выготский, Л. С. Избранные психологические исследования. М., 1956.
- [160] Леонтьев, А. Н. Проблемы развития психики. М., 1965
- [161] Гальперин, П. Я. Основные результаты исследований по проблеме формирования умственных действий и понятий. М., 1965.
- [162] Березин, В., Л. Березина, И. Никольская, Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике, Изд. „Просвещение”, Москва, 1985.

- [163] Димитров, Б., Е. Карашчанова, Статистика за нематематици, Унив. изд. „Н. Рилски”, Благоевград, 1999.
- [164] Колев, Н., Приложна статистика, Унив. изд. „Стопанство”, 1993.
- [165] Калинов, Кр., Статистически методи в поведенческите и социалните науки, Нов български университет, София, 2001.
- [166] Целые числа. <http://vadim-soft.narod.ru/math/integer.htm>
- [167] Разное. Материалы Кировской ЛМШ, 2001 г, 7 класс. <http://www.zaba.ru/cgi-bin/tasks.cgi?tour=books.sms701>
- [168] Графы. <http://vadim-soft.narod.ru/math/idea/idea8.htm>
- [169] Лекция 13: Ориентированные графы. <http://acadclasses.ru/math/lecture13.htm>
- [170] Игротека математического кружка. [http:// comp-science.khut.ru/index.html/Project/index.html](http://comp-science.khut.ru/index.html/Project/index.html)
- [171] Лекция 4: Теория чисел. <http://acadclasses.ru/math/lecture4.htm>
- [172] Лекция 10: Теория чисел-2. <http://acadclasses.ru/math/lecture10.htm>
- [173] Принцип Дирихле в теории чисел. <http://www.ermine.narod.ru/MATH/STAT/DIRHLET/sect2.html>
- [174] Математический кружок, 2-й год. Делимость-2. <http://www.zaba.ru/cgi-bin/tasks.cgi?tour=books.mk2.delim2>
- [175] Математический кружок. Делимость и остатки. Простые и составные. [http://www.zaba.ru/cgi-bin/tasks.cgi?tour= books.mk1.delim.prostsost&solution=1](http://www.zaba.ru/cgi-bin/tasks.cgi?tour=books.mk1.delim.prostsost&solution=1)
- [176] Игры для ума. <http://gsu.unibel.by/pages/melnikov>
- [177] Математика почти без вычислений. <http://mathark.narod.ru>
- [178] Ганчев, Ив., Ю. Нинова, В. Никова, Методика на обучението по математика, Благоевград, 2002.
- [179] Петров, П., Дидактика, Изд. „Веда Савена - ЖТ”, София, 1994.

- [180] Ганчев, Ив., Обучението по математика в системата на междупредметните връзки, НП, 1985.
- [181] Саранцев, Г. И., Гуманитаризация математического образования и его состояние сегодня, Сп. „Математика в школе”, кн. 4, 2006.
- [182] Розин, В. М., Этапы генезиса математических знаний (до начал Евклида), Сб. „Методологические проблемы”. Ежегодник, Москва, 1987.
- [183] Ганчев, Ив., Основни учебни дейности в урока по математика (синтез на резултатите от различни изследвания), София, 1999.
- [184] Петрова, Н., Интегративни тенденции в обучението по математика в контекста на перманентното образование, Дисертация, София, 2005.
- [185] Жекова, С., Психология на учителя, С., 1984.
- [186] Мирчев, Ив., Съвременното обучение – система от методически, организационни и управленски компоненти, сп. „Педагогика”, год. XVI, бр. 8, 2006.
- [187] Гроздев, С., Европейско кенгуру (помагало за ученици и учители), Библиотека СМБ № 8, София, 2005.
- [188] Gregory Makrides (editor), Identification, Motivation and Support of Mathematical Talents in European Schools, volumes 1, 2 & 3, 2006.
- [189] Клайн, Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей (руски превод, ГТТИ, 1933 г., стр. 401-418).
- [190] Розов, Н., Эволюция целей и ценностей образования, Сборник: Материалы XIX Международной конференции „Математика. Образование“, Чувашский государственный университет, Чебоксары, 2011, 20-29.
- [191] Клайн, Ф., Развитие на математиката през XIX век, първа част, Наука и изкуство, София, 1973.
- [192] Сборник материали: Химические приложения топологии и теории графов, Редактор: Кинг, Р. (руски превод, Мир, Москва, 1987).
- [193] Сборник: Теория на графите и приложението ѝ в химията, Съставители: Тютюлков, Н., Д. Бончев., Наука и изкуство, София, 1987.

- [194] Yanev, N., P. Milanov, I. Mirchev, Integer programming approach to HP folding *Serdica Journal of computing*, accepted 2012.
- [195] Yanev, N., P. Milanov, I. Trenchev, I. Mirchev. Integer programming approaches to HP folding, Poster VIII European Workshop in Drug Design, Certosa di Pontignano - Siena, May 22nd – 28th 2011.
- [196] Anglès d'Aurias, J.C., M. Pressmann, and A. Seb, *J. Math. And Comp. Model* **26**, 1, 1997.
- [197] Rieger, H. in: J. Kertesz and I. Kondor (ed.), *Advances in Computer Simulation*, Lecture Notes in Physics **501**, Springer Heidelberg 1998.
- [198] Alava, M. J., P. M. Duxbury, C. Moukarzel, and H. Rieger, *Exact Combinatorial Algorithms: Ground States of Sisordered Systems*, in: C. Domb and J. L. Lebowitz (ed.), *Phase Transitiions and Critical Pheomena* **18**, academic press, New York 2001.
- [199] Hartmann, A. K., H. Rieger, *Optomization Algorithms in Physics*, Wiley-VCH Verlag Berlin GmbH, Berlin, 2002.
- [200] Leath, P. L., *Phys. Rev. B* **14**, 5046, 1976.
- [201] Hoshen, J. and R. Kopelman, *Phys. Rev. B* **14**, 3438, 1976.
- [202] Herrman, H. J., D. C. Hong and H. E. Stanley, *J. Phys. A* **17**, L261, 1984.
- [203] Wilkinson, D. and J. F. Willemson, *J. Phys. A* **16**, 3365 (1983); D. Wilkinson and M. Barsony, *J. Phys. A* **17**, L129, 1984.