Югозападен Университет “Неофит Рилски”

Природо – математически факултет

Катедра “Математика”

ЦВЕТЕЛИНА НИКОЛАЕВА ПЕТРОВА

„Квази - Монте Карло интегриране в хибридни Коробови и Соболеви пространства“

АВТОРЕФЕРАТ

ЗА ПРИСЪЖДАНЕ НА ОБРАЗОВАТЕЛНА И НАУЧНА СТЕПЕН „ДОКТОР“ в област 4. Природни науки, математика и информатика, научно направление 4.5. Математика, Докторска програма по „Математически анализ”

Научен ръководител:
/Доц. д-р Васил Грозданов/

Благоевград, 2021 г.

Дисертационният труд се състои от увод, пет глави, заключение и цитирана литература. Литературата се състои от 50 заглавия. Общият обем на дисертацията е 225 страници. Размерът на страницата е А4.

Дисертационният труд е обсъден и предложен за защита на разширено заседание на катедра „Математика” към Природо-математически факултет при Югозападен университет „Неофит Рилски” – Благоевград, състояло се на 14.09.2021г.

Състав на научното жури:

1. Чл. кор. проф. дмн Олег Кръстев Мушкаров
2. Проф. дтн Иван Томов Димов
3. Проф. дмн Андрей Борисов Андреев
4. Доц. д-р Весна Стое Ристовска-Димитриевска
5. Доц. д-р Васил Станков Грозданов

Защитата на дисертационният труд ще се състои на 14.12.2021г от 13: 30 часа.

Съдържание

0.1 Обща характеристика на дисертационния труд

0.0.1 Актуалност на темата

В редица научни области, като числени методи, финансова математика, различни клонове на физиката и други, често се налага приблицено пресмятане на $s-$ мерни определени интеграли. Тяхното точно пресмятане е много трудно, даже и невъзможно. Поради тази причина, се налага тяхното приближено пресмятане. Квази - Монте Карло интегрирането е един успешен апарат за приближено пресмятане на този тип интеграли. Основната идея на този числен метод е за възли на интегрирането да се използва началния участък на тъй наречените равномерно разпределени редици.

Поради тази причина и не само, теорията на равномерно разпределените редици има своето самостойно научно развитие. Основната идея на тази теория е изследването на качеството на разпределението на някоя конкретна редица. Това се постига чрез използването на количествени характеристики, каквито са например дискрепанса и диафонията, които показват отклонението на едно конкретно разпределение

от идеалното равномерно разпределение.

Един класически пример на мрежа (крайна редица) в теори та на равномерно разпределението редици е тъй наречената мрежа на Заремба - Холтън. Тя е изследвана от различни автори. Една от разновидностите на тази мрежа е нейната конструкция в обобщени бройни системи или Канторови бази. Мултипликативната функционална система е най - подходяща за тяхното изследване.

Като споменахме за възможността редици и мрежи да бъдат конструирани в Канторови основи, то възниква нуждата за синхронизация между алгебричната конструкция на мрежи и редици и аналитичния апарат за тяхното изследване. Разбира се, най - подходящ за случая апарат са класове от пълни функционални системи, конструирани в същите Канторови бази. тези функционални системи биха намерили редица приложения в теорията на равномерно разпределените редици и Квази - Монте Карло интегрирането.

Имайки предвид горните факти, както и много други съображения от теоретичен и практичен аспект, се поставиха основните цели и разви теоритичната основа на настоящата дисертация.

0.0.2 Цели на дисертационния труд

Целите на дисертацията са:

1. Да се изследва $(Vil_{\mathcal{B}_2}; \alpha; \gamma)-$ диафонията на мрежите от типа на Заремба - Холтън, конструирани в Канторови бази. Да се покажат оценки отгоре и долу на $(Vil_{\mathcal{B}_2}; \alpha; \gamma)-$ диафонията на мрежите от въведения клас от двумерни мрежи. Да се покаже влиянието на експоненциалния параметър $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ върху точния порядък на $(Vil_{\mathcal{B}_2}; \alpha; \gamma)-$ диафонията намрежите от типа на Заремба - Холтън.

2. Да се дефинира нова функционална система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$, конструирана в Канторови бази и да се покаже нейната пълнота.

3. Да се въведе понятието за диафония, която се основава на използването на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ и да се покаже, че новият тип диафония е количествена мярка за неравномерността на разпределението на редици.

4. Да се въведе нов функционалн клас, който се основава на използването на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ и представлява Хилбертово пространство, генерирано от специален тип пораждащо ядро. Да се получи формула за грешката в най - общия случай на интегрирането в дефинираното Хилбертово пространство.

5. Да се намери връзката, която съществува между грешката в най -

лошия случай на интегрирането във въведеното Хилбертово пространство и новият туп на диафонията на мрежата от възлите на интегрирането.

6. Да се получат оценки отгоре на екстремалния дискрепанс и звезда - дискрепанса на произволна мрежа в термините на функциите от функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$.

7. Да се получи представяне на средно квадратичната грешка на интегрирането в произволно Хилбертово пространство като обикновена грешка на интегрирането в Хилбертово пространство, породено от разрядно променено ядро. Да се получи точна формула за средно квадратичната грешка в пространството $H_{Sob,s,\mu}$ в термините на функциите от системата Γ_b, конструирана във фиксирана $b-$ ична бройна система.

0.0.3 Предмет на изследване

Предметът на изследване е използването на пълната ортонормирана функционална система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$, конструирана в Канторови основи. Като се използва тази функционална система се представя нов тип на диафонията, като количествена мярка за неравномерността на разпределението на редици. Тази функционална система е използвана и получаване на оценки оттгоре на екстремалния дискрепанс и звезда - дискрепанса на произволна $s-$ мерна мрежа. Функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ е използвана също така и за въвеждане на функционални класове, които са Хилбертови пространства, генерирани от специални пораждащи ядра. Изследва се грешката в най - лошия случай и средно квадратичната грешка на интегрирането във въведените Хилбертови пространства.

0.0.4 Методи на изследване

За реализирането на поставените цели на дисертацията са използвани методи на аналитичната теория на числата, методите на Квази - Монте Карло интегрирането в Хилбертови пространства, оценки на тригонометричните суми по отношение на различни пълни ортонормирани функционални системи. Основните резултати са получени чрез използване на техники на функционалния анализ и числените методи.

0.0.5 Апробация

Резултатите получени в дисертацията са докладвани на следните конференции:

For participation in the Eight International Conference "Modern Trends in Science FMNS - 2019

УВОД

Математическата наука, която изследва качеството на разпределението на редици и мрежи в единичния $s-$ мерен куб $[0,1)^s$, отбеляза през последните години съществено развитие. Научният интерес към този клас от редици се дължи на многобройните приложения на тези математически обекти в различни клонове на човешкото познание. Също така развитието на компютърната техника позволява бързо и ефективно построяване на мрежи с добро качество на разпределението на своите елементи.

Дисертацията се състои от увод, пет глави, заключение и цитирана литература. В тази дисертация се въвежда функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ и са показани редица нейни приложения. Най - напред тя се използва за въвеждане на нов тип на диафонията, т. н. $(\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma)-$ диафонията като количествена характеристика за неравномерността на разпределението на редици. Получени са оценки отгоре на екстремалния дискрепанс и звезда - дискрепанса в термините на функциите от функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$.

Показани са предложения на функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ в теорията и практиката на Квази - Монте Карло интегрирането в Хилбертови и Соболеви пространства.

В работата са използвани различни техники за изпълняване на аналитичната природа на $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)-$ диафонията като грешка на интегрирането в Хилбертови пространства и количествена мрежа за неравномерността на разпределение на произволна редица от точки в $[0,1)^s$.

Сега ще представим основните резултати на нашата дисертация.

1. ВЪВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЯТА НА РАВНОМЕРНО РАЗПРЕДЕЛЕНИТЕ РЕДИЦИ

Глава първа има спомагателен характер за дисертацията. Целта ѝ е да се представят основни понятия и твърдения от теорията на равномерно разпределените редици, както и Квази - Монте Карло интегрирането в различни функционални класове.

Нека $s \geq 1$ е фиксирано цяло и с него ще означаваме равномерността навсякъде в дисертацията.

1.1 Някои класи от пълни ортонормирани функционални системи

1.1.1 Тригонометрична функционална система

Ще дадем следната дефиниция:

Дефиниция 1.1: *За произволно цяло* k *и реално* x *функцията* $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *се дефинира по следния начин* $e_k(x) = e^{2\pi \mathbf{i} kx}$.

За многомерния случай имаме следната дефиниция:

Дефиниция 1.2: *За произволен вектор* $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{Z}^s$ $\mathbf{k}-$*тата многомерна функция* $e_{\mathbf{k}} : [0,1)^s \to \mathbb{C}$ *се дефинира по следния начин*

$$e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{s} e_{k_j}(x_j), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_s) \in [0,1)^s.$$

Системата от функции $\mathcal{T}^s = \{e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s, \mathbf{x} \in [0,1)^s\}$ се нарича тригонометрична функционална система с размерност s.

1.1.2 Функциите на Уолш от ред b

Нека $b \geq 2$ е фиксирано цяло.

Дефиниция 1.3: *За произволно цяло* k *и реално* $x \in [0,1)$ *с* $b-$*ични представяния от вида* $k = \sum_{i=0}^{\nu} k_i b^i$ *и* $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i b^{-i-1}$, *където* $k_i, x_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, $k_\nu \neq 0$ *и за безбройно много стойности на* i $x_i \neq b-1$, $k-$*та Уолш функция* ${}_b wal_k : [0,1) \to \mathbb{C}$ *се дефинира като*

$${}_b wal_k(x) = e^{\frac{2\pi \mathbf{i}}{b}(k_0 x_0 + k_1 x_1 + \ldots + k_\nu x_\nu)}.$$

В следващата дефиниция е представена многомерната версия на Уолш функциите от ред b.

Дефиниция 1.6: *За произволен вектор* $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$, $\mathbf{k}-$*тата Уолш функция от ред* b ${}_b wal_{\mathbf{k}} : [0,1)^s \to \mathbb{C}$ *се дефинира като* ${}_b wal_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{s} {}_b wal_{k_j}(x_j)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_s) \in [0,1)^s$.

Системата от функции $\mathcal{W}(b) = \{{}_b wal_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s, \mathbf{x} \in [0,1)^s\}$ се нарича система на Уолш функциите от ред b.

1.1.3 Мултипликативна функционална система

През 1947 г. Виленкин [Вил 1] дефинира нова ортонормирана функционална система, която днес обикновено се нарича мултипликативна система. И така, нека е дадена редицата от цели числа $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots : b_j \geq 2$ за $j \geq 0\}$. Така наречените обобщени степени се дефинират посредством следните рекурентни равенства: $B_0 = 1$ и за $j \geq 0$ нека $B_{j+1} = b_j.B_j$. Представена е следната дефиниция:

Дефиниция 1.7 : *За произволно неотрицателно цяло k и реално $x \in [0,1)$, които в $B-$ична бройна система имат представяния от вида $k = \sum_{i=0}^{\nu} k_i B_i$ и $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{B_{i+1}}$, където за $i \geq 0$ $k_i, x_i \in \{0, 1, \ldots, b_i - 1\}$ и за безкрайно много стойности на i $x_i \neq b_i - 1$, $k-$тата Виленкин функция се дефинира като ${}_B Vil_k(x) = \prod_{i=0}^{\nu} \exp\left(2\pi \mathbf{i} \frac{x_i k_i}{b_i}\right)$.*

Сега ще представим концепцията на многомерните Виленкин функции. За $j = 1, 2, \ldots, s$ нека $B_j = \{b_0^{(j)}, b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, \ldots : b_p^{(j)} \geq 2$ за $p \geq 0\}$ са дадени редици от основи. Нека множеството от редици с основи го означим с $\mathcal{B}_s = (B_1, \ldots, B_s)$. Многомерните Виленкин функции, които съответстват на множеството $\mathcal{B}_s$ са дефиирани в следващата дефиниция:

Дефиниция 1.8 : *За произволен вектор $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$ $\mathbf{k}-$тата многомерна Виленкин функция ${}_{\mathcal{B}_s} Vil_{\mathbf{k}} : [0,1)^s \to C$ се дефи-*

нира като ${}_{\mathcal{B}_s}Vil_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{s} {}_{B_j}Vil_{k_j}(x_j), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_s) \in [0,1)^s.$

Системата от функции $Vil_{\mathcal{B}_s} = \{{}_{\mathcal{B}_s}Vil_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s, \ \mathbf{x} \in [0,1)^s\}$ се нарича Виленкин функционална система, която съответства на множеството $\mathcal{B}_s$.

1.1.4 Функционаланата система Γ_p

В този параграф е припомнена конструкцията на така наречената $b-$ична функционална система, представена от Хелекалек и Нидерайдер [ХеНи 1].

Дефиниция 1.9 : *За произволно цяло* $k \in \mathbb{N}_0$ *и реално* $x \in [0,1)$ *с* $b-$*ични представяния от вида* $k = \sum_{i=0}^{\nu} k_i b^i$ и $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i b^{-i-1}$, *където за* $i \geq 0 \quad k_i, x_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ *и за безбройно много стойности на* $i \quad x_i \neq b-1$ *функцията* ${}_b\gamma_k : [0,1) \to \mathbb{C}$ *се дефинира като*

$$ {}_b\gamma_k(x) = e^{2\pi i \left(\frac{k_0}{b} + \ldots + \frac{k_\nu}{b_{\nu+1}}\right)(x_0 + x_1 b + x_2 b^2 + \ldots)}. $$

В следващата дефиниция е представена многомерната версия на функциите от $b-$ ичната функционална система:

Дефиниция 1.10 : *За произволен вектор* $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$ *многомерната* $b-$*ична функция* ${}_b\gamma_{\mathbf{k}} : [0,1)^s \to \mathbb{C}$ *се дефинира като:*

$$ {}_b\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{s} \gamma_{k_j}(x_j), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_s) \in [0,1)^s. $$

Системата $\Gamma_b = \{{}_b\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s, \quad \mathbf{x} \in [0,1)^s\}$ се нарича $b-$ична функционална система.

1.2 Равномерно разпределени редици

В този параграф са представени някои основни факти от теорията на равномерно разпределените редици. Ще започнем с най-важният факт - кога една редица е равномерно разпределена.

1.2.1 Дефиниция за равномерно разпределени редици

Нека $\xi = (x_n)_{n\geq 0}$ да бъде произволна редица, чиито елементи са реални числа. За произволни $0 \leq a < b \leq 1$ нека $J = [a, b)$ да бъде съответният подинтервал на $[0, 1)$. Означаваме с $A_N(\xi; J)$ броят на точките x_n на редицата ξ, чиито индекси n удовлетворяват неравенството $0 \leq n \leq N - 1$ и принадлежат на интервала J, така че $A_N(\xi; J) = \{n : 0 \leq n \leq N - 1, x_n \in J\}$.

Дефиниция 1.11 : *(Херман Вайл) Ще казваме, че редицата ξ е равномерно разпределена по модул 1 (р. р. мод.1), ако граничното равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_N(\xi; J)}{N} = b - a$$

е в сила за всеки подинтервал J от $[0, 1)$.

Нека $s \geq 1$ да бъде фиксирано цяло и $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 0}$ да бъде произволна редица от точки в $s-$мерния единичен куб $[0,1)^s$. Нека $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_s) \in [0,1)^s$ и $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_s) \in [0,1)^s$ са два вектора. Ще казваме, че е изпълнена релацията $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ ако за $1 \leq j \leq s$ е в сила неравенството $a_j \leq b_j$. Нека $J = \prod_{j=1}^{s}[a_j, b_j)$. Нека $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 0}$ да бъде произволна редица от точки в $[0,1)^s$. За произволно цяло $N \geq 1$ нека както и досега $A_N(\xi; J) = \{n : 0 \leq n \leq N-1, \mathbf{x}_n \in J\}$

Дефиниция 1.12 *Редицата ξ се нарича равномерно разпределена в $[0,1)^s$ ако граничното равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_N(\xi; J)}{N} = \prod_{j=1}^{s}(b_j - a_j)$$

е изпълнено за всеки подинтервал J на $[0,1)^s$.

1.2.2 Интегрален критерии на Вайл

Един забележителен резултат от теорията на равномерно разпределените редици е следващата теорема, която се нарича интегрален критерий на Вайл:

Теорема 1.1: *Редицата $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 0}$ е равномерно разпределена в $[0,1)^s$ тогава и само тогава, когато за всяка комплекснозначна непрекъсната функция f, дефинирана над $[0,1)^s$ е в сила граничното ра-*

венство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

1.2.3 Експоненциален критерии на Вайл

Теорема 1.2: *Редицата* $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 0}$ *е равномерно разпеределена в* $[0,1)^s$ *тогава и само тогава, когато граничното равенство* $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n) = 0$ *е изпълнено за всеки вектор от цели числа* $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^s$ *и* $\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$.

Теорема 1.4: *(критерий на Вайл в термините на Уолш функциите от ред b) Редицата* $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 0}$ *е равномерно разпределена в* $[0,1)^s$ *тогава и само тогава, когато граничното равенство* $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} {}_b wal_k(\mathbf{x}_n) = 0$ *е изпълнено за всеки вектор* $\mathbf{k}\in\mathbb{N}^s$ *и* $\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$.

Теорема 1.5: *(критерий на Вайл в термините на Виленкин функциите) Редицата* $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 0}$ *е равномерно разпределена в* $[0,1)^s$ *тогава и само тогава, когато граничното равенство* $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} {}_{B_s}Vil_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n) = 0$ *е изпълнено за всеки вектор* $\mathbf{k}\in\mathbb{N}^s$ *и* $\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$.

Теорема 1.6: *(критерий на Вайл в термините на функциите на системата* Γ_b*) Редицата* $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 0}$ *е равномерно разпределена в* $[0,1)^s$ *тогава и само тогава, когато граничното равенство*

$\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=0}^{N-1} {}_b\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n) = 0$ *е изпълнено за всеки вектор* $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^s$, *и* $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$.

1.4 Количествени характеристики за неравномерността на разпределението на редици

Целта на този параграф е да се представят някои от количествените характеристики за отклонението на разпределението на една конкретна редица от идеалното равномерно разпределение.

1.4.1 Дискрепансът, като количествена мярка за неравномерността на разпределението на редици

Дефиниция 1.16: *За всяко цяло* $N \geq 1$ *екстремалният дискрепанс* $D_N(\xi)$ *на първите* N *елемента на редицата* ξ *от точките в* $[0,1)^s$ *се дефинира като* $D_N(\xi) = \sup\limits_{J \subseteq [0,1)^s} \left| \frac{A_N(\xi; J)}{N} - \prod\limits_{j=1}^{s} (b_j - a_j) \right|$, *където супремумът се взема по всеки подинтервал* J *на* $[0,1)^s$ *от вида* $J = \prod\limits_{j=1}^{s} (a_j, b_j)$ *и за* $1 \leq j \leq s$ $0 \leq a_j < b_j \leq 1$.

Дефиниция 1.17: *За всяко цяло* $N \geq 1$ *звезда-дискрепансът* $D_N^*(\xi)$ *на първите* N *елемента на редицата* ξ *от точки в* $[0,1)^s$ *се дефинира като* $D_N^*(\xi) = \sup\limits_{J^* \subseteq [0,1)^s} \left| \frac{A_N(\xi; J^*)}{N} - \prod\limits_{j=1}^{s} a_j \right|$, *където супремумът се взема по всеки подинтервал* J^* *на* $[0,1)^s$ *от вида* $J^* = \prod\limits_{j=1}^{s} (0, a_j)$ *и за* $1 \leq j \leq s$ $0 \leq a_j \leq 1$.

Теорема 1.7: *Редицата* ξ *е равномерно разпределена в* $[0,1)^s$, *то-*

гава и само тогава, когато е изпълнено граничното равенство

$$\lim_{N\to\infty} D_N(\xi) = 0 \text{ или } \lim_{N\to\infty} D_N^*(\xi) = 0.$$

1.4.2 Диафонията, като количествена мярка за неравномерността на разпределението на редици

През 1976 г. Цинтерхоф [Цин1] за първи път въвежда диафонията като количествена мярка за неравномерността на разпределението на редици. Днес тази величина се нарича класическа диафония. Дефиницията й се основава на използването на тригонометричната функционална система $\mathcal{T}^s$.

Дефиниция 1.18: *За произволно цяло* $N \geq 1$ *диафонията* $F_N(\xi)$ *на първите* N *елемента на редицата* $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 0}$ *от точки в* $[0,1)^s$ *се дефинира като* $F_N(\xi) = \left(\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\mathbf{0}\}} R^{-2}(\mathbf{m}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, *където за всеки вектор* $\mathbf{m} = (m_1, ...m_s) \in \mathbb{Z}^s$, $R(\mathbf{m}) = \prod_{j=1}^{s} R(m_j)$ *и за произволно цяло* m

$$R(m) = \begin{cases} 1, & \text{ако} \quad m = 0, \\ |m|, & \text{ако} \quad m \neq 0. \end{cases}$$

Класическата диафония е мярка за неравномерността на разпределението на редици, в смисъла на следната теорема:

Теорема 1.8: *Редицата ξ е равномерно разпределена по модул 1, тогава и само тогава, когато е изпълнено граничното равенство*

$$\lim_{N\to\infty} F_N(\xi) = 0.$$

Дефиниция 1.19: *($b-$ичната диафония [Гр Ст 2]): За всяко цяло $N \geq 1$ $b-$ичната диафония $F_N(\mathcal{W}(b);\xi)$ на първите N елемента на редицата $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 0}$ от точки в $[0,1)^s$ се дефинира като*

$$F_N(\mathcal{W}(b);\xi) = \left(\frac{1}{(b+1)^s - 1} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^s,\ \mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \rho(\mathbf{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b wal_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

където за всеки вектор $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_s) \in \mathbb{N}_0^s$ с неотрицателни цели координати $\rho(\mathbf{k}) = \prod_{j=1}^{s} \rho(k_j)$ и за всяко цяло $k \geq 0$

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & \text{ако} \quad k = 0, \\ b^{-2g}, & \text{за} \quad \forall\ k, \qquad b^g \leq k < b^{g+1}, \quad g \geq 0, \quad g \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Дефиниция 1.20: *(Γ_p - диафония [Хе 3]) за всяко цяло $N \geq 1$ т. н. Γ_p - диафония $F_N(\Gamma_p;\xi)$ на първите N елемента на редицата $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 0}$ от точки в $[0,1)^s$ се дефинира като*

$$F_N(\Gamma_p;\xi) = \left(\frac{1}{(p+1)^s - 1} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^s\setminus\{\mathbf{0}\}} \rho(\mathbf{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_p\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

където за всеки вектор $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$ *с неотрицателни цели координати* $\rho(\mathbf{k}) = \prod_{j=1}^{s} \rho(k_j)$ *и за всяко цяло* $k \geq 0$

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & \text{ако} \quad k = 0, \\ b^{-2g}, & \text{за} \quad \forall\ k, \qquad b^g \leq k < b^{g+1}, \quad g \geq 0, \quad g \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

1.5 Квази-Монте Карло интегриране в Хилбертови пространства

Ще припомним идеята за пораждащото ядро на Хилбертовото пространство.

Дефиниция 1.21: *Нека F е клас от функции, дефинирани в E и образуват Хилбертово простанство. Функцията $K(x, y)$ за $x, y \in E$ се нарича пораждащо ядро за пространството F ако са изпълнени следните условия:*

1) За всяко фиксирано $y \in E$ ядрото $K(x, y)$ като функция на x принадлежи на F;

2) (пораждащо свойство) За всяка функция $f \in F$ и всяко $y \in E$ е изпълнено равенството $f(y) = \langle f(x), K(x, y)\rangle_x$. В горното равенство индексът x показва, че скаларното произведение се взема по x.

Нека $H_s(K)$ е Хилбертово пространство с пораждащо ядро K, скаларното произведение $\langle . \rangle_{H_s(K)}$ и нормата $||.||_{H_s(K)}$.

Многомерният интеграл $I_s(f) = \displaystyle\int_{[0,1]^s} f(x)dx, \quad f \in H_s(K)$ се апроксимира чрез квази - Монте Карло алгоритъма $Q_s(f;P_N) = \dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n)$, където $P_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ е мрежа от детерминирани точки в $[0,1)^s$.

Дефиниция 1.22: *Грешката в най - лошия случай на интегрирането в пространството $H_s(K)$ се дефинира като*

$$e(H_s(K);P_N) = \sup_{f \in H_s(K),\ ||f||_{H_s(K)} \leq 1} |I_s(f) - Q_s(f;P_N)|.$$

2. ВЪРХУ $(VIL_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma)$–ДИАФОНИЯТА НА МРЕЖАТА ОТ ТИПА НА ЗАРЕМБА-ХОЛТЪН

2.2 Постановка на задачата

2.2.1 $(Vil_B;\alpha;\gamma)-$ диафонията

В този параграф на дисертацията е представена концепцията за т. н. $(Vil_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma)-$ диафонията. И така представена е следната дефиниция:

Дефиниция 2.6: *За произволно цяло $N \geq 1$ тегловата $(Vil_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma)-$ диафонията на първите N елемента на редицата $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 0}$ от точки в $[0,1)^s$ се дефинира като*

$$F_N(Vil_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma;\xi)$$

$$= \left(\frac{1}{C(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s)}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^s\setminus\{\mathbf{0}\}} R(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s;\mathbf{k})\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}{}_{\mathcal{B}_s}Vil_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

където за произволен вектор $\boldsymbol{k} = (k_1,\ldots,k_s) \in \mathbb{N}_0^s$, коефициентът $R(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s;k)$ се дефинира като $R(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s;\mathbf{k}) = \prod_{j=1}^{s}\rho(\alpha_j;\gamma_j;B_j;k_j)$ и за *произволно цяло число* $k \geq 0$ *и реални* $\alpha > 1$ *и* $\gamma > 0$ *имаме, че*

$$\rho(\alpha;\gamma;B;k) = \begin{cases} 1, & \text{ако} \quad k = 0, \\ \frac{\gamma}{B_g^{\alpha}}, & \text{ако} \quad B_g \leq k \leq B_{g+1}, \quad g \geq 0, \quad g \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Константата $C(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s)$ *се дефинира като* $C(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s) = \prod_{j=1}^{s} [1 + \gamma_j.\mu(B_j;\alpha_j)] - 1$, *където за редицата* $B = \{b_0, b_1, \ldots : b_j \geq 2\}$ *и за произволно реално число* $\alpha > 1$ $\mu(B;\alpha) = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{b_g - 1}{B_\alpha^{\alpha-1}}$.

2.2.2 Дефиниция на мрежата от типа на Заремба-Холтън, конструираба в обобщена бройна система

Нека $B_1 = \{b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, \ldots, b_{\nu-1}^{(1)}, b_\nu^{(1)}, b_{\nu+1}^{(1)}, \ldots : \text{ за } j \geq 0 \; b_j^{(1)} \geq 2\}$ е дадена редица от основи. Като използваме тази редица дефинираме редицата от основи $B_2 = \{b_0^{(2)}, b_1^{(2)}, \ldots, b_{\nu-1}^{(2)}, b_\nu^{(2)}, b_{\nu+1}^{(2)}, \ldots : \text{ за } j \geq 0 \; b_j^{(2)} \geq 2\}$ по следния начин. Нека да положим $b_0^{(2)} = b_{\nu-1}^{(1)}$, $b_1^{(2)} = b_{\nu-2}^{(1)}$, $\ldots$ $b_{\nu-1}^{(2)} = b_0^{(1)}$, а основите $b_\nu^{(2)}, b_{\nu+1}^{(2)}, \ldots$ могат да бъдат избрани произволни. Нека да въведем означението $\mathcal{B}_2 = (B_1, B_2)$.

Нека $\nu \geq 1$ е произволно и фиксирано цяло. Нека да означим

$$B_\nu = B_\nu^{(1)} = B_\nu^{(2)} = b_0^{(1)}.b_1^{(1)} \ldots b_{\nu-1}^{(1)}.$$

За произволно i такова, че $0 \leq i \leq B_\nu - 1$ да използваме B_2-ично представяне

$$i = i_{\nu-1} B_{\nu-1}^{(2)} + i_{\nu-2} B_{\nu-2}^{(2)} + \ldots + i_1 B_1^{(2)} + i_0 B_0^{(2)}, \tag{2.4}$$

където за $0 \le j \le \nu-1, i_j \in \{0,1,\dots,b_j^{(2)}-1\}$. Тогава величината $\eta(i) = \dfrac{i}{B_\nu}$ има B_1- ично представяне във вида

$$\eta_\nu(i) = \frac{i_{\nu-1}}{B_1^{(1)}} + \frac{i_{\nu-2}}{B_2^{(1)}} + \ldots + \frac{i_0}{B_\nu^{(1)}},$$

където за $0 \le j \le \nu-1$ имаме, че $i_{\nu-1-j} \in \{0,1,\dots,b_{\nu-1-j}^{(2)}-1\} = \{0,1,\dots,b_j^{(1)}-1\}$.

За това i от вида (2.4) общият член на редицата на Ван дер Корпут, дефинирана в B_2-ична бройна система има вида

$$p_\nu(i) = 0.i_0 i_1 \ldots i_{\nu-1} = \frac{i_0}{B_1^{(2)}} + \frac{i_1}{B_2^{(2)}} + \ldots + \frac{i_{\nu-1}}{B_\nu^{(2)}}.$$

Нека $\kappa = 0.k_{\nu-1}k_{\nu-2}\ldots k_0$, където за $0 \le j \le \nu-1$ $\kappa_j \in \{0,1,\dots,b_{\nu-1-j}^{(1)}-1\}$ да бъде фиксирано B_1- ично рационално число. Нека да означим $\eta_\nu^k(i) = \eta(i) \oplus_{B_1}^{[0,1)} \kappa$.

Нека $\mu = 0.\mu_0\mu_1\ldots\mu_{\nu-1}$, където за $0 \le j \le \nu-1$ $\mu_j \in \{0,1,\dots,b_j^{(2)}-1\}$, да бъде фиксирано B_2- ично рационално число. Нека да означим $z_\nu^\mu(i) = p_\nu(i) \oplus_{B_2}^{[0,1)} \mu$.

Детайлите на операциите $\oplus_{B_1}^{[0,1)}$ и $\oplus_{B_2}^{[0,1)}$ подробно са представени в дисертацията.

Конструирана е следната двумерна мрежа:

Дефиниция 2.7: *Нека $\nu \ge 1$ е произволно и фиксирано число. Нека κ и μ са както по-горе. Двумерната мрежа*

$$Z_\nu^{\kappa,\mu} = \{(\eta_\nu^k(i),\quad z_\nu^\mu(i)) : 0 \le i \le B_\nu - 1\}$$

се нарича мрежа от типа на Заремба - Холтън, конструирана в обобщена $\mathcal{B}_2-$ ична бройна система.

2.2.3 Постановка на задачите

В тази глава на дисертацията са поставени за решаване следните задачи:

Задача 2.1. Да се получи оценка отгоре на $(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma)-$ диафонията на мрежата от типа на Заремба-Холтън, дефинирана в обобщена бройна система.

Задача 2.2. Да се получи оценка отдолу на $(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma)-$ диафонията на мрежата от типа на Заремба-Холтън, дефинирана в обобщена бройна система.

Задача 2.3. Да се намерят точните порядъци на $(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma)-$ диафонията на мрежата от типа на Заремба-Холтън, дефинирана в обобщена бройна система.

Задача 2.4. Да се покаже влиянието на експоненциалните параметри α_1 и α_2 върху точните порядъци на $(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma)-$ диафонията на мрежата от типа на Заремба-Холтън, дефинирана в обобщена бройна система.

Решенията на тези задачи са последователно представени в следващия параграф.

2.3 Основни резултати

Решението на задача 2.1 е дадено в следващата теорема:

Теорема 2.1: *Нека редиците B_1 и B_2 от основи са ограничени отгоре, т. е. съществува константа $M \geq 2$, такава че за всяко $i \geq 0$ и $\tau = 1, 2$ ние имаме, че $b_i^{(\tau)} \leq M$. Нека $Z_\nu^{\kappa,\mu}$ да бъде произволна мрежа от типа на Заремба - Холтън. Тогава $(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma)-$диафонията на мрежата $Z_\nu^{\kappa,\mu}$ удовлетворяват оценката отгоре*

$$
\begin{aligned}
&F^2(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma;Z_\nu^{\kappa,\mu}) \\
\leq \frac{1}{C(\alpha;\gamma;B)} &\left\{ \gamma_1\gamma_2 M^{1+\alpha_2}\frac{2^{\alpha_2}}{2^{\alpha_2}-2}.\frac{1}{B_\nu^{\alpha_2}}\sum_{g=0}^{\nu-1}[B_g^{(1)}]^{\alpha_2-\alpha_1} \right. \\
&+\frac{2^{\alpha_1}}{2^{\alpha_1}-2}\left(\gamma_1 M + \gamma_1\gamma_2(M-1)^2\frac{2^{\alpha_2}}{2^{\alpha_2}-2}\right).\frac{1}{B_\nu^{\alpha_1}} \\
&+\frac{2^{\alpha_2}}{\alpha_2-2}\left(\gamma_2 M + \gamma_1\gamma_2(M-1)^2\frac{2^{\alpha_1}}{2\alpha_1-2}\right).\frac{1}{B_\nu^{\alpha_2}} \\
&\left. + \gamma_1\gamma_2(M-1)^2\frac{2^{\alpha_1+\alpha_2}}{(2_1^{\alpha}-2)(2_2^{\alpha}-2)}\frac{1}{B_\nu^{\alpha_1+\alpha_2-1}} \right\}.
\end{aligned}
$$

Решението на задача 2.2 е дадено в следващата теорема:

Теорема 2.2: *Нека редиците B_1 и B_2 от основи са ограничени отгоре, т. е. съществува константа $M \geq 2$, така че за всяко $i \geq 0$ и $\tau = 1, 2$ ние имаме , че $b_i^{(\tau)} \leq M$. Нека $Z_\nu^{\kappa,\mu}$ да бъде произволна мрежа от типа на Заремба-Холтън. Тогава $(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma)-$диафонията на мрежата*

$Z_\nu^{\kappa,\mu}$ *удовлетворява оценката отдолу*

$$F^2(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma;Z_\nu^{\kappa,\mu}) \geq \frac{1}{C(\alpha;\gamma;B)}\left\{\gamma_1\gamma_2\frac{2^{\alpha_2}}{M^{\alpha_2}}.\frac{1}{B_\nu^{\alpha_2}}\sum_{g=0}^{\nu-1}[B_g^{(1)}]^{\alpha_2-\alpha_1}\right.$$

$$+\frac{M^{\alpha_1}}{M^{\alpha_1}-M}\left(\gamma_1 M+\gamma_1\gamma_2(M-1)^2\frac{M^{\alpha_2}}{M^{\alpha_2}-M}\right).\frac{1}{B_\nu^{\alpha_1}}$$

$$+\frac{M^{\alpha_2}}{M_2^{\alpha}-M}\left(\gamma_2 M+\gamma_1\gamma_2(M-1)^2\frac{M^{\alpha_1}}{M\alpha_1-M}\right).\frac{1}{B_\nu^{\alpha_2}}$$

$$\left.+\ \gamma_1\gamma_2(M-1)^2\frac{M^{\alpha_1+\alpha_2}}{(M_1^{\alpha}-M)(M_2^{\alpha}-M)}\frac{1}{B_\nu^{\alpha_1+\alpha_2-1}}\right\}.$$

Точните порядъци, които зависят от експоненциалните параметри α_1 и α_2 са представени в следващата теорема. Това са решенията на Задача 2.3 и Задача 2.4.

Теорема 2.3: *Нека са изпълнени условията на Теорема 2.1 и Теорема 2.2. Нека $Z_\nu^{\kappa,\mu}$ да бъде произволна мрежа от типа на Зарембa-Холтън. Нека да означим $B_\nu = N$. Тогава $(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma)-$диафонията на мрежата $Z_\nu^{\kappa,\mu}$ удовлетворява включванията:*

(i) Ако $\alpha_1 = \alpha_2$, то

$$F(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma;Z_\nu^{\kappa,\mu}) \in \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N^{\frac{\alpha_2}{2}}}\right);$$

(i1) Ако $1 < \alpha_2 < 2$, то има някое $\varepsilon > 0$ че

$$F(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma;Z_\nu^{\kappa,\mu}) \in \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N^{1-\varepsilon}}\right);$$

(i2) Ако $\alpha_2 = 2$, *то*

$$F(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma;Z_\nu^{\kappa,\mu}) \in \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right);$$

(i3) Ако $\alpha_2 > 2$, *то има някое* $\varepsilon > 0$, *че*

$$F(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma;Z_\nu^{\kappa,\mu}) \in \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N^{1+\varepsilon}}\right);$$

(ii) Ако $\alpha_1 > \alpha_2$, *че*

$$F(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma;Z_\nu^{\kappa,\mu}) \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{\frac{\alpha_2}{2}}}\right);$$

(ii1) Ако $1 < \alpha_2 < 2$, *то има някое* $\varepsilon > 0$, *че*

$$F(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma;Z_\nu^{\kappa,\mu}) \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{1-\varepsilon}}\right);$$

(ii2) Ако $\alpha_2 = 2$, *че*

$$F(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma;Z_\nu^{\kappa,\mu}) \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right);$$

(ii3) Ако $\alpha_2 > 2$, *има някое* $\varepsilon > 0$, *че*

$$F(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma;Z_\nu^{\kappa,\mu}) \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{1+\varepsilon}}\right).$$

3. ФУНКЦИОНАЛНАТА СИСТЕМА $\Gamma_{\mathcal{B}_S}$ И НЯКОИ НЕЙНИ ПРИЛОЖЕНИЯ

3.1.2 Постановка на задачата

В тази глава на дисертацията са поставени за решаване следните задачи:

Задача 3.1. Да се дефинира нова функционална система, конструирана в обобщена бройна система и която да обобщава двете функционални системи Γ_p и Γ_b. Да се покажат някои от свойствата на функциите от тази система.

Задача 3.2. Да се докаже, че новата функционална система е пълна ортонормирана система над $L_2([0,1)^s)$.

Задача 3.3. Да се покаже интегралният критерий на Вайл в термините на функционалите от новата функционална система.

Задача 3.4. Да се въведе понятието за диафония, която се основава на използването на функциите от новата функционална система и да се докаже, че новият вид на диафонията е количествена мярка за неравномерно разпределението на редици.

Задача 3.5. Да се покаже изчислителната сложност на новия вид диафония.

Задача 3.6. Да се въведе нов функционален клас, който се основава на използването на функциите на новата система, който представлява Хилбертово пространство със специален тип пораждащо ядро.

Задача 3.7. Да се намери формула за грешката в най- общия случай на интегрирането в новото Хилбертово пространство.

Задача 3.8. Да се намери връзката, която съществува между грешката в най- общия случай на интегрирането в новото Хилбертово пространство и новия тип на диафонията на мрежата от възлите на интегрирането.

Решенията на горните задачи са последователно представени в следващите параграфи на тази глава от дисертацията.

3.2 Функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$

В този параграф е представено решението на задача 3.1. Ще дефинираме нова система от функции, дефинирани в обобщена бройна система. Получената система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ ще представлява едно естествено обобщение на системите от функции $\Gamma_p^{(s)}$ и $\Gamma_{\mathbf{b}}^{(s)}$.

3.2.1 Дефиниция на функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$.

Представена е следната дефиниция:

Дефиниция 3.3: *За произволно цяло $k \geq 0$ и реално число $x \in$*

$[0,1)$, *които в обобщена $B-$ична бройна система имат представяния* $k = \sum_{i=0}^{\nu} k_i B_i$ *и* $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{B_{i+1}}$, *където за* $i \geq 0, k_i, x_i \in \{0,1,\ldots,b_i - 1\}, k_\nu \neq 0$ *и за безбройно много стойности на* i *имаме, че* $x_i \neq b_i - 1$, $k-$*тата функция* ${}_B\gamma_k : [0,1) \to \mathbb{C}$ *се дефинира по следния начин*

$$ {}_B\gamma_k(x) = e^{2\pi\mathbf{i}.\left(\frac{k_0}{B_1}+\frac{k_1}{B_2}+\ldots+\frac{k_\nu}{B_{\nu+1}}\right).(x_0B_0+x_1B_1+\ldots)}. $$

Системата от функции $\Gamma_B = \{{}_B\gamma_k(x) : k \in \mathbb{N}_0, x \in [0,1)\}$ ще наречем $B-$ ична функционална система.

Сега ще представим многомерната версия на $B-$ ичната функционална система. Нека $B_1 = \{b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, \ldots : b_i^{(1)} \geq 2$ за $i \geq 0\}$, $\ldots$, $B_s = \{b_0^{(s)}, b_1^{(s)}, \ldots : b_i^{(s)} \geq 2$ за $i \geq 0\}$ са дадени s на брой редици от основи. Нека да въведем означението $B_s = (B_1, \ldots, B_s)$.

Многомерната версия на функциите от $\mathcal{B}_s-$ ичната система е представена в следващата дефиниция:

Дефиниция 3.4: *За произволен вектор* $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$ $\mathbf{k}-$*та функция* ${}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}} : [0,1)^s \to \mathbb{C}$ *се дефинира като*

$$ {}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{s} {}_{B_j}\gamma_{k_j}(x_j), \ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_s) \in [0,1)^s. $$

Системата от функции $\Gamma_{\mathcal{B}_s} = \{{}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s, \ \mathbf{x} \in [0,1)^s\}$ ще наречем $\mathcal{B}_s-$ична система.

Нека да направим следните конкретни избори на редиците от основи: Нека $\{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ да бъде дадено множество от не непременно различни цели $b_j \geq 2$. За $1 \leq j \leq s$ нека $B_j = \{b_j, b_j, \ldots : b_j \geq 2\}$ и нека означим $\mathbf{b} = (B_1, \ldots, B_s)$. В този случай от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ се получава системата $\Gamma_{\mathbf{b}}^{(s)}$, която беше въведена от Хелекалек и Нидерайдер [Хе Ни 1].

3.3 Пълнота на системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$.

В този параграф е представено решението на Задача 3.2. В сила е следната теорема:

Теорема 3.1: *Системата от функции*

$$\Gamma_{\mathcal{B}_s} = \{{}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s,\ \mathbf{x} \in [0,1)^s\}$$

е пълен ортонормиран базис на пространството $L_2([0,1)^s)$.

3.4 Критерий на Вайл в термините от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$

В този параграф е представено решението на Задача 3.3.

Теорема 3.2: *(критерий на Вайл) Редицата* $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ *е равномерно разпределена в* $[0,1)^s$ *тогава и само тогава, когато граничното равенство*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n) = 0$$

е изпълнено за всеки вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s$ *такъв, че* $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$.

3.5 Понятия за диафонията, която се основава на системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$.

В този параграф е представено решението на Задача 3.4.

3.5.1 Дефиниция на $(\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma)-$ диафонията.

За произволен вектор $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_s) \in \mathbb{N}_0^s$ да дефинираме коефициента

$$R(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s;\mathbf{k}) = \prod_{j=1}^{s} R(\alpha_j;\gamma_j;B_j;k_j). \tag{3.16}$$

Нека дефинираме константата

$$C(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s) = \prod_{j=1}^{s} [1+\gamma_j.\mu(B_j;\alpha_j)] - 1, \tag{3.17}$$

където за редицата от основи B и за произволно реално $\alpha > 1$ имаме

$$\mu(B;\alpha) = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{b_g - 1}{B_g^{\alpha-1}}.$$

В следващата дефиниция е въведена концепцията за $(\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma)-$диафонията.

Дефиниция 3.7: *За произволно цяло $N \geq 1$ тегловата $(\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma)-$диафония на първите N елемента на редицата $\xi = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 0}$ от точки в $[0,1)^s$ се дефинира като*

$$F_N(\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma;\xi)$$
$$= \left(\frac{1}{C(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s)} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^s\setminus\{\mathbf{0}\}} R(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s;\mathbf{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

където коефициентът $R(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s;\mathbf{k})$ *и константата* $C(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s)$ *са дефинирани съответно чрез равенствата (3.16) и (3.17).*

Нека в Дефиниция 3.7. да направим следния избор на параметрите: Системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ заместваме със системата Γ_p. За $1 \leq j \leq s$ нека $\alpha_j = 2$ и $\gamma_j = 1$. Нека означим $\mathbf{2} = (2, 2, \ldots, 2)$ и $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$. Тогава полученият вид на диафонията е $F_N(\Gamma_p; \mathbf{2}; \mathbf{1}; \xi)$ е въведена от Хелекалек [Хе 1] и това е точно $p-$ична диафония.

Фактът, че $(\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma)-$ диафонията е количествена мярка за неравномерността на разпределението на редици е представен в следващата теорема:

Теорема 3.3: *Редицата* ξ *е равномерно разпределена в* $[0,1)^s$, *тогава и само тогава, когато граничното равенство*

$$\lim_{N\to\infty} F_N(\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma;\xi) = 0$$

е изпълнено за произволни вектори α *и* γ, *които бяха представени по-горе.*

В следващата теорема е показана изчислителната сложност на $(\Gamma_{\mathbf{b}};\alpha;\gamma)-$ диафонията на произволна мрежа ξ_N, състояща се от N точки в $[0,1)^s$. По този начин е представено решението на Задача 3.5. Детайлите са следните: Нека $b \geq 2$ е фиксирана основа. Нека произволното реално $x \in [0,1)$ има $b-$ично представяне във вида

$$x = \frac{x_g}{b^g} + \frac{x_{g+1}}{b^{g+1}} + \dots,$$

където $x_g \neq 0$ и $g \geq 0$ е цяло число. Тогава цялата част на $b-$ичния логаритъм на x е $-g$. Означаваме $[\log_b x] = -g$. В сила е следната теорема:

Теорема 3.4: *За дадено цяло $b \geq 2$ и произволни реални $\alpha > 1$ и $\gamma > 0$ да дефинираме функцията*

$$\varphi(\alpha;\gamma;b;x) = 1 + \gamma\frac{b^\alpha(b-1)}{b^\alpha - b} - \gamma\frac{b^\alpha(b^\alpha-1)}{b^\alpha - b}b^{(\alpha-1)[\log_b x]}, \quad x \in [0,1).$$

За произволни вектори $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_s)$ от цели $b_j \geq 2$, които могат и да не са различни помежду си, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ и $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, където за $0 \leq j \leq s$ $\alpha_j > 1$ и $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_s > 0$ да конструираме функцията

$$\Phi(\alpha;\gamma;b;\mathbf{x}) = -1 + \prod_{j=1}^{s}\varphi(\alpha_j;\gamma_j;b_j;x_j), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) \in [0,1)^s.$$

Тогава $(\Gamma_{\mathbf{b}};\alpha;\gamma)-$диафонията на произволна мрежа $\xi_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}\}$, съставена от N точки в $[0,1)^s$ удовлетворява равенството

$$\Gamma^2(\Gamma_{\mathbf{b}};\alpha;\gamma;\xi_N)$$
$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^{s}\left[1 + \gamma_j(b-1)\frac{b^{\alpha_j}}{b^{\alpha_j} - b}\right] - 1}\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\Phi(\alpha;\gamma;b;\mathbf{x}_n \ominus_{\mathbf{b}}^{[0,1)^s} \mathbf{x}_m).$$

Тук операцията $\ominus_{\mathbf{b}}^{[0,1)^s}$ *се получава от операцията* $\ominus_{\mathcal{B}_s}^{[0,1)^s}$, *реализирана в* $\mathbf{b}-$*ична система.*

Теорема 3.4. ни показва, че изчислителната сложност на $(\Gamma_{\mathbf{b}};\alpha;\gamma)-$диафонията за произволна мрежа ξ_N съставена от N точки в $[0,1)^s$ е $\mathcal{O}(N^2)$. Това означава, че за да се изчисли $(\Gamma_{\mathbf{b}};\alpha;\gamma)-$диафонията на мрежата ξ_N е необходимо да се направят $C.N^2$ на брой операции. Тук константата C зависи от размерността s и не зависи от N.

3.6 Квази - Монте Карло интегриране в Хилбертовото пространство $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$

В този параграф са представени решенията на задачите 3.6, 3.7 и 3.8.

3.6.2 Дефиниция на пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$

Нека α и γ са отново векторите от експоненциални параметри и координатни тегла.

За две функции f и g, дефинирани за $\mathbf{x} \in [0,1)^s$, да дефинираме тяхното скаларно произведение като

$$< f, g >_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^s} R^{-1}(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s;\mathbf{k})\widehat{f}_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}}(\mathbf{k})\overline{\widehat{g}}_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}}(\mathbf{k}),$$

където коефициентът $R(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s;\mathbf{k})$ беше дефиниран чрез равенството

(3.16) и за всеки вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s$

$$\widehat{f}_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}}(\mathbf{k}) = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{x})_{\mathcal{B}_s} \overline{\gamma}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

означава $\mathbf{k}-$тият коефициент на Фурие на функцията $f(\mathbf{x})$ по отношение на функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$.

В следващата дефиниция е представена идеята за функционалното пространство $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$:

Дефиниция 3.10: *Функционалното пространство* $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$ *се определя като*

$$H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma} = \{f : ||f||_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma} < +\infty\}.$$

В следващата лема е показан вида на пораждащото ядро на пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$.

Лема 3.3: *Нека конструираме функцията* $K_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma} : [0,1)^{2s} \to \mathbb{C}$, *като*

$$K_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^s} R(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s;\mathbf{k})_{\mathcal{B}_s} \gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})_{\mathcal{B}_s} \overline{\gamma}_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in [0,1)^s,$$

където коефициентът $R(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s;\mathbf{k})$ *е дефиниран чрез равенството (3.16). Тогава функцията* $K_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *е пораждащо ядро на пространството* $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$.

3.6.3 Формула за грешката на интегрирането в

пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$

В този параграф е представено решението на Задача 3.7. В сила е следната теорема.

Теорема 3.5: *Нека $P_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ да бъде произволна мрежа от N точки в $[0,1)^s$. Тогава грешката $e(H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}; P_N)$ на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$ чрез използването на мрежата P_N удовлетворява равенството*

$$e^2(H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}; P_N)$$

$$= -1 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^s} R(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s;\mathbf{k})_{\mathcal{B}_s} \gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n)_{\mathcal{B}_s} \overline{\gamma}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_m),$$

т. е. в сила е равенството

$$e^2(H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}; P_N) = -1 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} K_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m).$$

3.6.4 Връзка между грешката на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$ и $(\Gamma_{\mathcal{B}_s,\alpha,\gamma})-$ диафонията на мрежата от възлите на интегрирането

В този параграф е представено решението на Задача 3.8. В следващата теорема е показана връзката между грешката е най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$ и тегловата $(\Gamma_{\mathcal{B}_s,\alpha,\gamma})-$ диафонията на мрежата от възлите на интегрирането.

Теорема 3.6: *Нека α и γ са дадени вектори от експоненциални параметри и координатни тегла. Нека P_N да бъде произволна мрежа от N точки в $[0,1)^s$. Тогава грешката в най- лошия случай $e(H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma};P_N)$ на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$ чрез използване на мрежата P_N и $(\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma)-$диафонията на мрежата P_N са свързани с равенството*

$$e(H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma};P_N) = \sqrt{C(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s)} \cdot F(\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma;P_N),$$

където константата $C(\alpha;\gamma;\mathcal{B}_s)$ е дефинирана чрез формулата (3.24).

4. ВЪРХУ НЕРАВЕНСТВОТО НА ЕРДЬОШ-ТУРАН-КОКСМА, ОСНОВАВАЩО СЕ НА СИСТЕМАТА $\Gamma_{\mathcal{B}_S}$

4.1.2 Постановка на задачата

Нека $\Gamma_{\mathcal{B}_s} = \{_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) : \mathbf{k} \in (0,1)^s\}$ да бъде функционалната система, дефинирана в Дефиниция 3.4.

В тази глава на дисертацията са поставени за решаване следните задачи:

Задача 4.1. Да се получи вида на неравенството на Ердьош-Туран Коксма за екстремалния дискрепанс в термините на функциите от функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$.

Задача 4.2. Да се получи вида на неравенството на Ердьош-Туран Коксма за звезда - дискрепанса в термините на функциите от функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$.

4.3 Основни резултати

В този параграф на дисертацията са представени решениета на горните две задачи.

4.3.1 Оценка на екстремалния дискрепанс

В следващата теорема е представено решението на задача 4.1.

Теорема 4.6: *Нека $M \geq 2$ е произволно цяло число. За $1 \leq i \leq s$ нека цялото $\alpha_i \geq 1$ се определя от условието*

$$B_{\alpha_i}^{(i)} = \min_{\alpha \geq 1} \{ B_\alpha^{(i)} : B_\alpha^{(i)} \geq M \}$$

и да дефинираме вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$.

По така дефинирания вектор α, нека множествата $\Delta(\alpha)$ и $\Delta^*(\alpha)$ са дефинирани в условието на Лема 4.4.

Нека $P_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ да бъде произволна мрежа от точки в $[0,1)^s$. Тогава е в сила следното:

(i) (Груба форма на неравенството на Ердьош-Туран-Коксма) Екстремалният дискрепанс на мрежата P_N удовлетворява неравенството

$$D(P_N) \leq 1 - \left(1 - \frac{2}{M}\right)^s + \sup_{J \in \mathcal{J}} \sum_{\mathbf{k} \in \Delta^*(\alpha)} \left| {}_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}} \widehat{f}_J(\mathbf{k}) \right| . \left| S({}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}; P_N) \right|,$$

където

$$S({}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}; P_N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n)$$

е тригонометричната сума на мрежата P_N по отношение на функцията ${}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$.

(ii) (Рафинирана форма на неравенството на Ердьош-Туран-Коксма) Нека редиците от основи $B_1, \ldots, B_s$ са ограничени оттгоре, т. е. съществува абсолютна константа $q \geq 2$, че всяко i, $1 \leq i \leq s$ и $g \geq 0$ $b_g^{(i)} \leq q$. Нека да определим цялото $r > 0$ от условието, че за всяко i, $1 \leq i \leq s$, $q^{\alpha_i} < r.M$. Нека да дефинираме величината

$$B_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}}(\alpha) = \max_{\mathbf{k} \in \Delta^*(\alpha)} |S({}_{B_s}\gamma_{\mathbf{k}}; P_N)|.$$

Тогава е в сила неравенството

$$D(P_N)$$

$$\leq 1 + \left(1 - \frac{2}{M}\right)^s + B_{\Gamma_s}(\alpha) \left\{ \left[1 + \left(\frac{4}{\pi} + \frac{4}{5 \log q}\right] (\log r + \log M)\right]^s - 1 \right\}.$$

При някои конкретни избори на параметрите от Теорема 4.6 са получени следните резултати:

Следствие 4.1: *Нека в Теорема 4.6 ние заменим системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ със системата Γ_p, където p е произволно просто число. Нека $M = p^\alpha$ за някое цяло α. Нека $P_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ да бъде произволна мрежа. Тогава, от Теорема 4.6 се получава Теорема 4.5, която е резултат на Халекалек [Хе 5].*

Следствие 4.2: *Нека в Теорема 4.5 направим следния избор на параметрите: За вско $i, 1 \leq i \leq s$ и $j \geq 0$ положим $b_j^{(i)} = b$. Нека $M = b$.*

Нека P_N да бъде произволна мрежа от N точки в $[0,1)^s$. Тогава от Теорема 4.5 се получава Теорема 4.3, която е резултат на Халекалек [Хе 5].

4.3.2 Оценка на звезда - дискрепанса

В този параграф е представено решението на задача 4.2. В сила е следната теорема.

Теорема 4.7: *Нека $M \geq 2$ е произволно цяло число. За $1 \leq i \leq s$ нека цялото $\alpha_i \geq 1$ се определя от условието*

$$B_{\alpha_i}^{(i)} = \min_{\alpha \geq 1}\{B_\alpha^{(i)} : B_\alpha^{(i)} \geq M\}$$

и да дефинираме вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$. По така дефинирания вектор α, нека множествата $\Delta(\alpha)$ и $\Delta^*(\alpha)$ са дефинирани в условието на Лема 4. 4.

Нека $P_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ да бъде произволна мрежа от точки в $[0,1)^s$. Тогава е в сила следното:

(i) (Груба форма на неравенството на Ердьош - Туран - Коксма) Звезда - дискрепансът на мрежата P_N удовлетворява неравенството

$$D^*(P_N) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s + \sup_{J^* \in \mathcal{J}^*} \sum_{\mathbf{k} \in \Delta^*(\alpha)} |{}_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}}\widehat{f}_{J^*}(\mathbf{k})|.|S({}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}; P_N)|,$$

където

$$S({}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}; P_N) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} {}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n)$$

е тригонометричната сума на мрежата P_N по отношение на функцията ${}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$.

(ii) (Рафинирана форма на неравенството на Ердьош - Туран - Коксма) Нека редицата от основи $B_1, \ldots, B_s$ са ограничени отгоре, т.е. съществува абсолютна константа $q \geq 2$, че всяко $i, 1 \leq i \leq s$ и $g \geq 0$ $b_g^{(i)} \leq q$.

Нека да определим цялото $r > 0$ от условието, че за всяко $i, 1 \leq i \leq s, q^{\alpha_i} < rM$. Нека да дефинираме величината

$$B_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}}(\alpha) = \max_{\mathbf{k} \in \Delta^*(\alpha)} \left| S({}_{\mathcal{B}_s}\gamma_{\mathbf{k}}; P_N) \right|.$$

Тогава е в сила неравенството

$$D^*(P_N) \leq$$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s + B_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}}(\alpha). \left\{ \left[1 + \left(\frac{2}{\pi} + \frac{2}{5 \log q} \right) (\log r + \log M) \right]^s - 1 \right\}.$$

5. КВАЗИ - МОНТЕ КАРЛО ИНТЕГРИРАНЕ В СОБОЛЕВОТО ПРОСТРАНСТВО $H_{SOB,S,\mu}$

5.1 Увод в теорията на средно квадратичната грешка на интегрирането в Соболеви пространства

5.1.2 Средно квадратична грешка на интегрирането в Хилбертови пространства

Нека $P_N = \{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ е произволна мрежа от точки в $[0,1)^s$ и нека $\sigma \in [0,1)^s$ е фиксиран вектор. Нека на всяка точка $\mathbf{x}_n$ на мрежата P_N, като използваме вектора σ, да съпоставим точката $\mathbf{x}_n \oplus_b^{[0,1)^s} \sigma$. По този начин ние получаваме нова мрежа

$$P_N(\sigma) = \{\mathbf{x}_0 \oplus_b^{[0,1)^s} \sigma, \ldots, \mathbf{x}_{N-1} \oplus_b^{[0,1)^s} \sigma\}.$$

Дефиниция 5.3: *За произволно пораждащо ядро $K \in L_2([0,1)^{2s})$ "$b-$ичното разрядно промененото ядро" $K_{b-ds}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ се дефинира като*

$$K_{b-ds}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{[0,1]^s} K(\mathbf{x} \oplus_b^{[0,1]^s} \sigma, \mathbf{y} \oplus_b^{[0,1)^s} \sigma) d\sigma, \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1)^s.$$

Дефиниция 5.4 : *Нека $H_s(K)$ е произволно Хилбертово пространс-*

тво породено от ядрото K. Нека P_N е произволна мрежа, състояща се от N точки в $[0,1)^s$. Средно квадратичната грешка в най - лошия случай $\widehat{e}_{b-ds}(H_s(K);P_N)$ на интегрирането в пространството $H_s(K)$ чрез използване на мрежата P_N се дефинира като

$$\widehat{e}_{b-ds}(H_s(K);P_N) = \left(\int_{[0,1]^s} e^2(H_s(K);P_N(\sigma))d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Целта на тази глава от дисертацията е да се изследва средно квадратичната грешка в Соболево пространство $H_{Sob,s,\mu}$, което ще бъде въведено в следващия параграф.

5.1.3 Дефиниция на Соболевото пространство $H_{Sob,s,\mu}$

Соболевите пространства са множество от функции, на които са наложени условия за гладкост на техните смесени частни производни от определен ред.

Дефиницията на разглежданото от нас Соболево пространство се основава на използването на първите три полинома на Бернули. Ще припомним тяхното дефиниране: $B_0 \equiv 1,\ x \in [0,1),\ \ B_1 = x - \frac{1}{2},\ x \in [0,1),\ \ B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},\ x \in [0,1)$.

Следвайки Слоан и Вожняковски [СлВо1] ще припомним и използваме концепцията на Соболевото пространство $H_{Sob,s,\mu}$.

За произволно реално $\mu > 0$ нека H_μ е Соболевото пространство на абсолютни непрекъснати реално значни функции, дефинирани в $[0,1)$ и чиято първа производна е интегруема в квадрат.

Скаларното произведени в пространството H_μ се дефинира като

$$< f,g >_{H_\mu}= \int_0^1 f(t)dt \int_0^1 g(t)dt + \mu^{-1} \int_0^1 f'(t)g'(t)dt,\ \forall\ f,g \in H_\mu.$$

Пораждащото ядро $K_\mu(x,y)$ на пространството H_μ се представя като

$$K_\mu(x,y) = 1 + \frac{\mu}{2}[B_2(|x-y|) + 2B_1(x)B_1(y)],\ x,y \in [0,1).$$

За произволен вектор $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_s)$, където $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_s > 0$, от ненарастващи положителни тегла, Соболевото пространство $H_{Sob,s,\mu}$ се дефинира като теглово тензорно произведение на съответните едномерни Соболеви пространства $H_{\mu_1}, H_{\mu_2},\dots,H_{\mu_s}$, т. е.

$$H_{Sob,s,\mu} = H_{\mu_1} \otimes \dots \otimes H_{\mu_s}.$$

По този начин, $H_{Sob,s,\mu}$ е Хилбертово пространство със скаларно произведение

$$< f,g >_{H_{Sob,s,\mu}}= \sum_{u\subseteq\{1,2,\dots,s\}} \prod_{j\in u} \mu_j^{-1} \int_{[0,1]^{|u|}} \int_{[0,1]^{s-|u|}} \frac{\delta^{|u|}f}{\delta \mathbf{x}_u}(\mathbf{x})d\mathbf{x}_u \times$$
$$\int_{[0,1]^{s-|u|}} \frac{\delta^{|u|}g}{\delta \mathbf{x}_u}(\mathbf{x})d\mathbf{x}_u,$$

където за вектора $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_s), \mathbf{x}_u$ означава векторът с $|u|$ координати такива, че $(x_u)_i = x_i$ за всяко $i \in u$ и $\mathbf{x}_{-u}$ обозначава векторът

$\mathbf{x}_{\{1,2,\dots,s\}\setminus u}$. За $u = \emptyset$ определяме $\prod_{j\in u} \mu_j^{-1} = 1$ и за $u = \emptyset$ и $u = \{1, 2, \dots, s\}$ интегралът $\int_{[0,1]^0}$ е равен на 1.

Пораждащото ядро на пространството $H_{Sob,s,\mu}$ се определя като

$$K_{s,\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{j=1}^{s} K_{\mu_j}(x_j, y_j), \ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s), \ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_s) \in [0, 1)^s.$$

5.2 Постановка на задачата

В този параграф са поставени за решаване следните задачи:

Задача 5.1. Да се получи представяне на средно квадратичната грешка на интегрирането в произволно хилбертово пространство като обикновена грешка на интегрирането в Хилбертово пространство, породено от разрядно променено ядро.

Задача 5.2. Да се получи точна формула за средно квадратичната грешка на интегрирането в пространството $H_{Sob,s,\mu}$ в термините на функциите от системата Γ_b, конструирани във фиксирана $b-$ична бройна система.

5.3 Решение на задача 5.1

Решението на Задача 5.1 е представено в следващата теорема:

Теорема 5.1: *За всяко ядро $K \in L_2([0, 1)^{2s})$, което поражда Хилбертовото пространство $H_s(K)$ и произволна мрежа P_N е в сила равен-*

ството

$$\widehat{e}_{b-ds}(H_s(K); P_N) = e(H_s(K_{b-ds}); P_N),$$

т. е. средно квадратичната грешка на интегрирането в Хилбертовото пространство $H_s(K)$ е равна на обикновената грешка на интегрирането в Хилбертовото пространство $H_s(K_{b-ds})$, породено от разрядно породеното ядро K_{b-ds}.

5.4 Решение на задача 5.2

В този параграф е представено решението на Задача 5.2. Ще представим някои технически детайли. За произволно цяло $k \geq 0$ и тегло $\mu > 0$ да дефинираме коефициента

$$\rho_\mu(k) = \begin{cases} 1, & \text{ако} \quad k = 0, \\ \frac{\mu}{2}\left(\frac{b}{\sin^2 \pi \frac{k_g}{b}} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{b^{2(g+1)}} & \\ +\frac{\mu b(b-1)}{2\sin^2 \pi \frac{k_g}{b}} \cdot \frac{1}{b^{3(g+1)}}, & \text{ако} \quad k_g b^g \leq k \leq (k_g+1)b^g - 1, \\ & \qquad g \geq 0, g \in \mathbb{Z}, \\ & \qquad k_g \in \{1, \ldots, b-1\}. \end{cases}$$

За произволен вектор $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ и векторът от тегла $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$, където $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_s > 0$ многомерният коефициент се дефинира като

$$\rho_\mu(\mathbf{k}) = \prod_{j=1}^{s} \rho_{\mu_j}(k_j).$$

Теорема 5.2: *Нека $H_{Sob,s,\mu}$ да бъде Соболевото пространство, дефинирано в параграф 5.2 на дисертацията. Тогава средно квадратичната* *грешка на интегрирането в пространството $H_{Sob,s,\mu}$, чрез използване на произволната мрежа $P_N = \{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ удовлетворява равенството*

$$\widehat{e}^2_{b-ds}(H_{Sob,s,\mu}; P_N) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^s\setminus\{\mathbf{0}\}} \rho_\mu(\mathbf{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_n) \right|^2,$$

където коефициентът $\rho_\mu(\mathbf{k})$ е дефиниран чрез равенството.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторът на дисертационния труд смята, че целите на дисертацията и поставените задачи за решаване в отделните й параграфи са решени успешно.

По отношение на задачите, поставени в Глава втора са получени следните резултати: В Дефиниция 2.7 е представена дефиницията на двумерната мрежа $Z_{\nu}^{\kappa,\mu}$ от типа на Заремба - Холтън. Решението на задача 2.1 е представено в Теорема 2.1, където е показана оценката отгоре на $(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma)-$ диафонията на мрежите от типа на Заремба - Холтън. Решението на задача 2.2 е представено в Теорема 2.2, където е показана оценката отдолу на $(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma)-$ диафонията на мрежите от типа на Заремба - Холтън. В Теорема 2.3 са показани точните порядъци на $(Vil_{\mathcal{B}_2};\alpha;\gamma)-$ диафонията на мрежите от типа на Заремба - Холтън. Показано е влиянието на векторът от експоненциални параметри върху тези точни порядъци. На практика Теорема 2.3 дава решението на задачите 2.3 и 2.4.

В глава трета са поставени за разглеждане осем задачи. Решенията им са развити последователно в цялата тази глава. В дефинициите 3.3 и 3.4 са дефинирани едномерните и многомерните функции на системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. В Теорема 3.1 е показана пълнотата на функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. В теорема 3.2 е показан критерият на Вайл в термините на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. В Дефиниция 3.7 е представена концепцията за $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)-$ диафонията. Нейната дефиниция се основава на използването на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. Теорема 3.3 узаконява $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)-$ диафонията като количествена мярка за неравномерността на разпределението на редици от точки в $[0,1)^s$. Теорема 3.4 дава изчислителната сложност $O(N^2)$ на $(\Gamma_b; \alpha; \gamma)-$ диафонията на произволна мрежа, съставена от N точки в $[0,1)^s$. В Дефиниция 3.10 е въведено функционалното пространство $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma}$. В Лема 3.3 е показан вида на пораждащото ядро на Хилбертовото пространство $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma}$. В Теорема 3.5 се представя точна формула за грешката в най - лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma}$ чрез използване на произволна мрежа в термините на пораждащото ядро на това пространство. В Теорема 3.6 грешката в най - лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma}$ и $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)-$ диафонията на мрежата от възлите на интегрирането са свързани по между си. По този начин е изяснена аналитичната природа на $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)-$ диафонията - тя е грешката на интегрирането в специално Хилбертово пространство.

В глава четвърта са поставени за решение две задачи. Техните решения са представени съответно в Теореми 4.6 и 4.7. В тях са представени оценки отгоре на екстремалния дискрепанс и звезда - дискрепанса в термините на тригонометричните суми по отношение на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. Тези оценки са на практика неравенства от типа на неравенството на Ердьош - Туран - Коксма. Представените оценки са представени във вид на груба и рафинирана форма на неравенството на Ердьош - Туран - Коксма.

Глава пета беше поставена на приложението на функционалната система Γ_b в теорията на Квази - МОнте Карло интегрирането в Соболевото пространство $H_{Sob,s,\mu}$. Бяха поставени за решаване две задачи. В теорема 5.1 средно квадратичната грешка на интегрирането в хилбертовото пространство се оредставя като обикновена грешка на интегрирането в Хилбертово пространство, породено от разрядно промененото ядро. В Теорема 5.2 е представена точна формула за средно квадратичната грешка на интегрирането в пространството $H_{Sob,s,\mu}$ в термините на тригонометричната сума на възлите на интегрирането по отношение на функциите от системата Γ_b.

6. ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА

[Вил 1] Vilenkin, N., Ja.; 1947, *On a class of complete orthonormal systems.*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math., Russian **11**, pp. 363-400.

[Гр Ст 2] Grozdanov, V. S. - Stoilova, S. S.: *The b-adic diaphony*, Rendiconti di Matematica, Serie VII **22** (2002), 203-221.

[Ха 3] P. Hellekalek, General discrepancy astimates

: The Haar function system. Acta Arith., **LXVII** (4)(1944), 313 - 322.

[Ха Ни 1] P. Hellekalek, H. Niederreiter, Constructions of uniformly distributed sequences using the b-adic method, Uniform Distribution Theory **6** no 1 (2011), 185-200.

[Цин 1] P. Zinterhof, Uber einige Abschatzungen bei der Approximation von Funktionen mit Gleiverteilungsmethoden, Sitzungsber. $\ddot{O}sterr.Akad.Wiss.Math - NaturWiss.Kl.$

$, 185 (1976), 121 - 132.$

6.1 Приноси на автора

1. Получени са точните порядъци на $(Vil_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma)-$ диафонията на мрежата на Заремба - Холтън, конструирана в Канторови бази. Показано е влиянието на вектора от експоненциални параметри върху тези точни порядъци.

2. Дефинирана е функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$ и е показан факта, че тя е пълен ортонормиран базис на пространството $L_2([0,1)^s)$. Въведена е една нова версия на диафонията, т.н. $(\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma)-$ диафония и е показан факта, че тя е количествена мярка за неравномерността на разпределението на редици.

3. Въведено е функционалното пространство $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$, която представлява теглово Хилбертово пространство. Получена е точна формула за грешката в най - лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$, изразена в термините на пораждащото ядро на това пространство.

4. Намерена е връзката, която съществува между грешката в най - лишия случай на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$ и $(\Gamma_{\mathcal{B}_s};\alpha;\gamma)-$ диафонията на мрежата, съставена от възлите на интегрирането.

5. Получени са оценки отгоре на екстремалния дискрепанс и звезда

- дискрепанса на произволна $s-$ мерна мрежа в термините на тригонометричната сума на тази мрежа по отношение на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. Тези оценки са неравенства от типа на неравенството на Ердьош - Туран - Коксма.

6. Получена е точна формула за средно квадратичната грешка на интегрирането в Соболевото пространство $H_{Sob,s,\mu}$ в термините на тригонометричната сума на мрежата от възлите на интегрирането по отношение на функциите от системата Γ_b.

6.2 Статии на автора по темата на дисертацията

6.3 Декларация за оригиналност

Декларирам, че настоящата дисертация съдържа оригинални резултати, получени при проведените от мен научни изследвания. Резултатите, които са използвани в дисертационния труд и са получени от други автори са надлежно и подробно описани в раздел *"Цитирана литература"*.

Настоящата дисертация не е използвана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Подпис:

/Цв. Петрова/