

## РЕЦЕНЗИЯ

върху дисертационен труд за присъждане  
на образователна и научна степен „Доктор” по:  
област на висше образование 4. Природни науки, математика и  
информатика, професионално направление 4.5 Математика,  
докторска програма по „Математически анализ”,

**Автор на дисертационния труд: Цветелина Николаева Петрова**

**Тема на дисертационния труд: „Квази-Монте Карло интегриране в  
хибридни Коробови и Соболеви пространства”**

**Рецензент: проф. дмн Андрей Борисов Андреев**

### 1. Актуалност на темата

Предмет на изследване в рецензирания дисертационен труд е теорията на равномерно разпределените редици и тяхната връзка за пресмятане на многомерни интеграли. Такива редици имат важна роля в стохастичните числени методи. Акцент се поставя върху качеството на разпределение на конкретни редици, като се използват оценки на дискрепанса и диафонията, показващи отклонението им от идеалното равномерно разпределение. Актуалността на направените изследвания се определя поне от следните предпоставки:

- Известно е, че пресмятането на интеграли с голяма размерност ( $s \geq 4$ ) най-успешно се реализира чрез стохастични методи, какъвто е и квази-Монте Карло методът. Такива интеграли възникват в ядрената физика, финансовата математика и при създаване и изследване на изкуствен интелект;
- Получаване на равномерно (квазиравномерни) мрежи при дискретизация на областта е съществена стъпка при използване на числени методи. Ето защо теорията на равномерно разпределените редици е подходящ подход за такива реализации, особени при многомерни задачи;

- Изброените две предпоставки се съчетават подходящо със Соболевите функционални пространства за апроксимиране на решенията на важни моделни задачи.

Считам, че актуалността на избраната тематика е безспорна.

## **2. Познаване на състоянието на проблемите**

Особеността на тематиката е такава, че конструирането на конкретна равномерна редица (мрежа) поражда интересни и полезни приложения и се счита за определен успех. Докторантката решава именно такава задача, за да я приложи в крайна сметка за стохастично числено интегриране. Интересът към такива редици отчетливо е видно да датира от средата на миналия век и е свързан с такива математици като Хаар, Виленкин, Заремба и др.

От дисертацията е ясно, че докторантката е много добре запозната с еволюцията и съвременното състояние на проблемите. Тя демонстрира владение на техниките за доказване на твърденията. Не мога да не отбележа пълнотата при доказване на големия брой теореми.

## **3. Методики на изследване**

В дисертацията е използвана разнообразна техника от функционалния анализ, теория на числата и Фуриерови развиятия в пълни ортонормирани функционални системи. Квази-Монте Карло методите за числено интегриране в Хилбертови пространства, дефинирани в  $s$ -мерния единичен куб, допълват разнообразието от подходи в дисертационния труд.

Бих искал да подчертая, че докторантката е преодоляла редица математически трудности.

## **4. Структура, обем и кратък преглед на съдържанието на дисертационния труд**

Дисертацията в обем от 288 страници се състои от пет глави и цитирана литература. Библиографията включва базови резултати, получени от известни математици от миналия век, както и най-нови публикации и съдържа общо 50 заглавия.

Освен това в края на дисертационния труд са дадени основните приноси (според автора).

**Глава първа** има спомагателен характер. В нея се дават важни за теорията на равномерно разпределените редици дефиниции, както и фундаментални резултати. Кратки разяснения се дават за:

- Класи от пълни ортонормирани системи, които ще се използват. Това са някои тригонометрични системи; функции на Уолш; мултипликативна система на Виленкин и др.;
- Равномерно разпределени редици – дефиниции и критерии;
- Дискрепансът и диафонията като количествени мерки за неравномерност;
- Квази-Монте Карло интегриране в Хилбертови пространства.

**Глава втора** изследва диафонията като мярка за неравномерност на мрежи от типа на Заремба-Холтън. Тук са получени оценки отгоре и отдолу за въпросната диафония. Показано е, макар за двумерна мрежа, че съществуват техники за подобряване порядъка на  $L_2$ -дискрепанса.

В **глава трета** се използва съществено резултата на Хелекалек и Нидерайдер за две пълни ортонормирани функционални системи  $\Gamma_p$  и  $\Gamma_b$  върху  $p$ -ична и  $b$ -ична бройна система ( $p$  – просто число). На тази база докторантката конструира нова функционална система  $\Gamma_{\beta_s}$ . Като се използва обобщена бройна система (с променлива основа), в  $\Gamma_{\beta_s}$  се включват  $\Gamma_p$  и  $\Gamma_b$ . Новата система е пълна и ортонормирана над  $L_2([0,1]^s)$ . Тази глава разглежда редица свойства на въведената функционална система. Акцент се поставя върху приложението за квази-Монте Карло числено интегриране.

В **глава четвърта** се изследва едно важно приложение във въведеното функционално пространство  $\Gamma_{\beta_s}$ . Става въпрос за оценка на екстремалния и на звезда-дискрепанса. Известно е, че дискрепансът е количествена мярка за разпределението на точките на редици и мрежи. Но също така той служи за определяне на грешката при стохастичното числено интегриране. Класически

подход за оценка на дискрепанса се извършва чрез неравенството на Ердьош-Туран-Коксма. Това неравенство има груба и прецизирана (рафинирана) форма. В тази глава се дават подробни доказателства на оценки от типа на горното неравенство чрез използване на тригонометрични суми.

**Глава пета** съдържа резултати, които оправдават заглавието на дисертационния труд. Става дума за квази-Монте Карло числено интегриране на  $s$ -мерни интеграли за клас от функции, принадлежащи на Соболеви пространства. Тези специални Хилбертови пространства се генерират от подходящи функционални ядра. Основното изследване в тази глава е посветено на намиране на средноквадратичната грешка при численото интегриране.

## 5. Приноси в дисертационния труд

Ще резюмирам моето лично мнение за по-съществените резултати, получени в дисертацията на Цветелина Петрова:

- Въведена е оригинална функционална система  $\Gamma_{\beta_s}$ , конструирана в Канторови бази. Доказано е (Теорема 3.1), че това функционално пространство е пълно.
- Чрез функции от  $\Gamma_{\beta_s}$  се дефинира съответната диафония. Тя се явява количествена мярка за неравномерност на разпределението на редици от точки в  $s$ -мерния единичен куб (Теорема 3.3).
- Отново на базата на функции от  $\Gamma_{\beta_s}$  се конструира Хилбертово пространство от Соболев вид, генерирано от специален тип пораждащо ядро. Даден е в явен вид функционалът на грешката при стохастично числено интегриране на функции от въведеното Хилбертово пространство (Теорема 3.5 и Теорема 3.6). Грешката, разбира се, зависи от новия тип диафония на мрежата от възли на интегриране.
- Получени са резултати от типа на неравенството на Ердьош-Туран-Коксма. Това са доказани оценки за екстремалния дискрепанс и за звезда-дискрепанса чрез тригонометрични суми за функции от системата  $\Gamma_{\beta_s}$  (Теорема 4.6 и Теорема 4.7).

- Получена е средноквадратична оценка на грешката чрез функционалната система  $\Gamma_b$  при численото квази-Монте Карло интегриране в Соболевото пространство  $H_{sob,s,\mu}$ . Намерена е формула за средноквадратична оценка на грешката за споменатото Хилбертово пространство в термините на тригонометричната сума на възлите на интегриране (Теорема 5.2).

В заключение ще подчертая, че при теоретичните доказателства на посочените по-горе теореми са преодолені сериозни математически затруднения.

## **6. Публикации по дисертационния труд**

Докторантката има четири публикации по дисертацията, една от които е самостоятелна, а останалите са съвместни с научния ръководител. Статиите са представени в документите по процедурата. Освен това резултати от дисертацията са докладвани на една международна конференция.

## **7. Бъдещо използване на резултатите**

Изложението в дисертацията подсказва, че Цветелина Тодорова има предпочитания към функционални преобразувания, които водят до оценки в изчислителната математика. Запознат съм с работата на нейния научен ръководител доц. Грозданов, чиито ученици имат добро научно развитие. Като отчетем подходящата среда за научно развитие в катедра „Математика” на ЮЗУ „Неофит Рилски”, имам увереност, че Цветелина Тодорова ще продължи да се развива в избраната област и в професията на математик.

## **8. Цитирания от други автори**

Не ми е известно резултати от дисертацията да са използвани или цитирани от други специалисти.

## **9. Преценка за автореферата**

Авторефератът правилно отразява основните положения и научните приноси на дисертационния труд. Според мен той е донякъде излишно голям по обем.

## 10. Критични бележки и препоръки

По дисертационния труд ще направя няколко критични бележки, които не променят общото ми мнение за неговите качества:

- Читателят на дисертацията лесно попада на стилови и езикови неточности, както и на печатни грешки. Ще спомена само някои от тях:
  - стр. 23: „за някои” вместо „за всеки” (може би от превода на „for any”);
  - стр. 51: повторението „степени степени”;
  - стр. 55: грешка в заглавието;
  - „то има някое  $\varepsilon > 0$ ” вместо „то съществува  $\varepsilon > 0$ ”;
  - „подинтеграл” вместо „подинтервал” (Теорема 3.5);
  - стр. 149: „квадратурна формула”, а не „квадратична формула”;
  - стр. 213: тегловият вектор не е точен;
- Имам забележка към записа и подреждането на формулите. Свързващите знаци за действия, равенство и други подобни при пренасяне на формулата не винаги са на следващия ред. Например, знакът за принадлежност е на един ред, а самото множество – на следващия. Има разкъсване на формули на съседни страници (например стр. 43-44) и др. под.
- Присъствието на „Коробови” в заглавието е неуместно;
- Не мога да приема израза „грешката в най-лошия случай на интегриране”. Важен принцип в изчислителната математика е, че грешката (оценката) при интегриране зависи и от нормата на интегрируемата функция, която от своя страна в случая зависи очевидно от пораждащото ядро. Впрочем, добре е да бъде дадена в общ вид нормата на функциите в използваното Соболево пространство.
- При сложен и много дълъг като запис аргумент на експоненциалната функция е по-добре да се използва записът  $\exp(\dots)$ ;
- Авторските статии по дисертационния труд трябва да присъстват декларативно в автореферата и/или в дисертационния труд. Така например в автореферата (поне в това, което получих) параграф 6.2 е празен.

Накрая бих препоръчал резултатите от дисертацията и тези, които докторантката ще получи в бъдеще, да бъдат по-широко апробирани. Считам, че има достатъчно

научни форуми, на които резултатите от разглежданата тематика биха предизвикали интерес.

### **11. Заключение**

Предвид гореизложеното, може да се направи изводът, че предложеният дисертационен труд съдържа достатъчни по количество и качество научни резултати. Той напълно удовлетворява изискванията на ЗРАСРБ и ППЗРАСРБ. Затова моето мнение е „ЗА” присъждане на образователна и научна степен „Доктор” на Цветелина Николаева Петрова в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, специалност „Математически анализ”.

21. 11. 2021 г.  
Габрово

Рецензент:  
/проф. дмн А.Б. Андреев/