

РЕЦЕНЗИЯ

на дисертационен труд на тема

„Квази–Монте Карло интегриране в хибридни

Коробови и Соболеви пространства”

**с автор Цветелина Николаева Петрова за присъждане на образователна
и научна степен „Доктор“**

научно направление 4. Природни науки, математика и информатика,
научна специалност 4.5 математика, докторска програма по
„Математически анализ“

Общо представяне на дисертацията:

Предложената за рецензиране дисертация е написана в обем от 228 страници. Структурата на дисертацията е следната: Тя е развита като увод, пет глави, заключение и цитирана литература от 50 заглавия.

В дисертационният труд се представят научни резултати от теорията на равномерно разпределените редици. Използвани са методи на аналитичната теория на числата, квази-Монте Карло методите за интегриране в Хилбертови пространства, оценки за тригонометричните суми по отношение на различни ортонормирани функционални системи. Смятам, че дисертационният труд попада в научно направление 4. Природни науки, математика и информатика, научна специалност 4.5 математика, докторска програма по „Математически анализ“.

Актуалност на разглежданите в дисертационния труд научни проблеми:

В дисертационният труд са разгледани актуални научни проблеми от количествената теория на равномерно разпределените редици, свързани с изследвания на нов тип диафонията на мрежите от типа на Заремба-Холтън, конструирани в Канторови бази, както и да се покаже, че предложения тип диафония е количествена мярка за неравномерност на разпределението на редици. В тази смисъл, актуалността на разглежданите проблеми в дисертацията не буди никакво съмнение.

Съдържание на дисертацията:

В увода е направен кратък обзор на съдържанието на останалите глави на дисертацията.

В глава първа са представени някои основни факти и твърдения от теорията на равномерно разпределените редици. Също така е направен увод и в теорията и практиката на квази- Монте Карло интегрирането в Хилбертови пространства, които се генерират от специални функции, наречени пораждащи ядра. В тази глава са представени само основни понятия и твърдения от споменатите научни области. След това всяка глава започва с подробна литературна справка на резултати, имащи отношение към проблемите на дисертацията. След това са формулирани и задачите, които трябва да се решат в съответната глава на дисертацията. Техните решения последователно са развити до края на всяка една глава с резултати. Има параграфи с предварителни резултати, които съществено допринасят за опростяването на доказателствата на основните резултати.

В глава втора се използват функциите на Виленкин, конструирани в Канторови системи, за да се изследва $(Vil_{B_2}; \alpha; \gamma)$ -диафонията на мрежите от типа на Заремба – Холтън. Използването на два, на практика произволни параметъра, позволява да се конструира един много широк клас от двумерни мрежи, конструирани в Канторови системи. Така се реализира успешен синхрон между конструираните на мрежите и аналитичния апарат за тяхното изследване. В тази глава са поставени за решаване четири задачи. Основните резултати са развити в Теорема 2.1 и 2.2, където са показани оценките отгоре и отдолу на $(Vil_{B_2}; \alpha; \gamma)$ -диафонията на произволна мрежа от изследвания клас. Тези два резултата дават възможност в Теорема 2.3 да се получат точните порядъци на $(Vil_{B_2}; \alpha; \gamma)$ -диафонията на изследваните мрежи. Показана е зависимостта на тези точни порядъци от вектора от експоненциални параметри $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

В глава трета докторантката предлага конструктивния принцип на функциите от системата Γ_{B_S} . Тези функции са конструирани в Канторови системи и представляват едно съвсем естествено обобщение на функциите от b -ичната система, предложена съвсем наскоро от Хелекалек и Нидерайтер. В Теорема 3.1 е показана пълнотата на въведената функционална система Γ_{B_S} . Това е принципно важен резултат, тъй като на него се основава фуриеровия анализ, използван до края на тази глава. В дисертацията са показани някои приложения на функциите от системата Γ_{B_S} в теоремата на равномерно разпределените редици и Квази – Монте Карло интегрирането. В Теорема 3.2 е показан критерият на Вайл в термините на функциите от системата Γ_{B_S} . В Дефиниция 3.7 е представена концепцията на един нов тип на диафонията, т. н. $(\Gamma_{B_S}; \alpha; \gamma)$ – диафония. В Теорема 3.3 е показан факта, че $(\Gamma_{B_S}; \alpha; \gamma)$ – диафонията е количествена мярка за

неравномерността на разпределението на редици, в смисъл, че една редица е равномерно разпределена тогава и само тогава, когато нейната $(\Gamma_{B_S}; \alpha; \gamma)$ – диафония клони към нула. В Теорема 3.4 е показана изчислителната сложност на $(\Gamma_{B_S}; \alpha; \gamma)$ – диафонията на произволна мрежа, съставена от N точки. След това се развива концепцията за Хилбертово пространство $H_{\Gamma_{B_S}; \alpha; \gamma}$. Дефиницията на това пространство се основава на използване на функциите от системата Γ_{B_S} . Показан е и вида на пораждащото ядро на въведеното функционално пространство. В теорема 3.5 е получена точна формула за грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{B_S}; \alpha; \gamma}$ чрез използване на произволна мрежа. В Теорема 3.6 грешката на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{B_S}; \alpha; \gamma}$ и $(\Gamma_{B_S}; \alpha; \gamma)$ – диафонията на мрежата, съставена от възлите на интегрирането са свързани помежду си. На практика тази теорема пресича в една точка всички идеи на тази глава на дисертацията.

Основните резултати на Глава четвърта на дисертацията са неравенствата на Ердьош–Туран–Коксма. Те представляват оценки отгоре на екстремалния дискрепанс и на звезда–дискрепанса на произволна мрежа в термините на тригонометричната сума на мрежата по отношение на функциите от системата Γ_{B_S} . Основните резултати са развити в Теореме 4.5 и 4.6. Като следствие от основните резултати се получават резултати, получени съвсем наскоро от други автори,

Глава пета е посветена на квази–Монте Карло интегрирането в Соболеви пространства. В Дефиниция 5.4 се дефинира понятието средно квадратична грешка на интегрирането в произволно Хилбертово пространство. В параграф 5.1.3 е припомнена идеята на Слоан и Вожняковски за конструкцията на Соболевото пространство $H_{Sob,s,\mu}$. Поставени са за решаване две задачи. В теорема 5.1 средно квадратичната грешка на интегрирането в Хилбертово пространство е представена като обикновена грешка в Хилбертово пространство, породено от разрядно промененото ядро. В Теорема 5.2 е показана точна формула за средно квадратичната грешка на интегрирането в пространството $H_{Sob,s,\mu}$ в термините на функциите от b -ичната система.

Представеният към дисертацията автореферат коректно и точно представя нейното съдържание.

Представените 3 излезли от печат статии и тази, представена за публикуване, са достатъчни и отговарят на изискванията за публикационна активност на докторанта.

Цитираната литература е коректна и напълно отразява моментното състояние на изследванията, извършени от други автори в областта на тематиката на дисертацията.

Препоръки за бъдеща работа:

В дисертационната работа са получени съществени научни резултати. Препоръчвам на докторантката да публикува резултатите си в още по-престижни издания, като смятам, че получените резултати заслужават да станат достояние на по-широка математическа аудитория. Смятам също така, че като илюстрация на тези резултати, тя би могла да разгледа един или два числени примера за интегриране, което би направило нейните резултати по-популярни.

Заключение:

Получените в дисертацията резултати имат своето място и значение в общия научен процес от теориите на равномерно разпределените редици и квази – Монте Карло интегрирането и представляват принос на докторантката за развитието на тези научни области.

Като количество и най-вече като качество получените резултати са достатъчни и отговарят на изискванията за придобиването на образователната и научна степен „Доктор“.

На основание на получените резултати на Цветелина Николаева Петрова може да се даде образователната и научна степен „Доктор“.

Убедено препоръчвам на научното жури да присъди **образователната и научна степен „Доктор“ на Цветелина Николаева Петрова.**

Поради това ще гласувам **ПОЛОЖИТЕЛНО** за присъждане на образователната и научна степен „Доктор“ на Цветелина Николаева Петрова.

19. 11. 2021 г.
София

Рецензент:
/Проф. д.т.н. Иван Димов /