

С Т А Н О В И Щ Е

от акад. Олег Кръстев Мушкаров,
Институт по математика и информатика, БАН

за дисертацията на Цветелина Николаева Петрова "Квази-Монте Карло интегриране в хибридни Коробови и Соболеви пространства" за придобиване на образователна и научна степен "доктор" в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, научно направление 4.5 Математика, научна специалност: Математически анализ

Представям становището си като член на Научното жури, назначено със заповед № 2547 от 15.10.2021 г. на ректора на ЮЗУ "Неофит Рилски" проф. д-р Б. Юруков. То е изготвено според изискванията на:

- Закона за развитието на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ);
- Правилника за прилагане на ЗРАСРБ;
- Вътрешните правила за развитие на академичния състав в ЮЗУ "Неофит Рилски".

1. Представеният дисертационен труд е в областта на равномерно разпределените редици и квази- Монте Карло интегрирането в различни функционални пространства.

Глава 1 има помощен характер и в нея се въвежда техническия апарат и необходимите теоретични факти, които се използват в дисертацията. По-конкретно, разглеждат се различни класически пълни ортонормирани функционални системи (тригонометричната система, системата на Уолш, мултипликативната система на Виленкин и системата Γ_b , въведена от P. Hellekalek и H. Niederreiter през 2011 г.), които се използват за характеризиране на равномерно разпределени редици, известните критерии на Херман Вайл за такива редици, дискрепансът и диафонията като количествени мерки за неравномерност на разпределение на редица и някои необходими сведения от теорията на квази-Монте Карло интегрирането в Хилбертови пространства. Разгледани са и някои важни примери на равномерно разпределени редици, които се използват в Монте Карло и квази-Монте Карло интегрирането.

Изследванията в Глава 2 са посветени на тъй наречената $(Vil_{B_s}; \alpha; \gamma)$ -диафония на мрежата от типа на Заремба-Холтън в обобщена бройна система. В Теорема 2.1 и Теорема 2.2 са получени съответно оценки отгоре и отдолу на тази диафония, а в Теорема 2.3 са намерени нейните точните порядъци и асимптотично поведение.

Основната цел на Глава 3 е въвеждането и изучаването на една нова функционалната система Γ_{B_s} , която е естествено обобщение на класическата система $\Gamma_p^{(s)}$ и нейния \mathbf{b} -ичен аналог Γ_b . Доказани са редица полезни равенства за функциите от тази система, които се използват съществено в по-нататъшните разглеждания. В Теорема 3.1 и Теорема 3.2 е доказано съответно, че тази система

образува пълен ортонормиран базис на пространството $L_2([0, 1]^s)$ и, че за нея е в сила аналог на критерия на Вайл. По-нататък в тази глава е въведена диафония, основана на функциите от новата система и в Теорема 3.3 е показано, че тя е количествена мярка за неравномерност на разпределението на редица в s -мерния единичен куб $[0, 1]^s$. В Теорема 3.4 е доказано, че изчислителната сложност на Γ -диафонията за произволна мрежа съставена от N точки в $[0, 1]^s$ е $\mathcal{O}(N^2)$, т.е. за нейното изчисляване са необходими $C.N^2$ стъпки, където C е константа, която зависи само от размерността s . По-нататък в тази глава са дадени необходими сведения за квази-Монте Карло интегриране в Хилбертово пространство с пораждащо ядро и те се прилагат за хилбертовото пространство $H_{\Gamma_{B_s, \alpha, \gamma}}$ и пораждащо ядро $K_{\Gamma_{B_s, \alpha, \gamma}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, определени чрез функционалната система Γ_{B_s} . Най-важните резултати в тази насока са Теорема 3.5 и Теорема 3.6, в които са получени съответно експлицитна формула за грешката при квази-Монте Карло интегрирането в това Хилбертово пространство и нейната връзка с $(\Gamma_{B_s}, \alpha, \gamma)$ -диафонията на мрежата от възлите на интегрирането.

В Глава 4 са доказани неравенства от типа на Erdős- Turan-Koksma за екстремалния дискрепанс и звезда-дискрепанса в термините на функционалната система Γ_{B_s} . В нейното начало са дадени дефинициите на последните две понятия и са разгледани класическите варианти на неравенството на Erdős- Turan-Koksma за тригонометричната система, функциите на Walsh и на Хаг от ред b и тези от системата Γ_p . В Теорема 4.6 са доказани две форми на неравенството на Erdős- Turan-Koksma за екстремалния дискрепанс в системата Γ_{B_s} и е показано, че тя е обобщение на класически резултати на P. Hellekalek. Аналогични неравенства за звезда-дискрепанса в Γ_{B_s} са получени в Теорема 4.7.

В последната глава на дисертацията се изследва средноквадратичната грешка на интегрирането в Соболевото пространство $H_{Sob, s, \mu}$. В Теорема 5.1 е показано, че за всяко ядро K в $L_2([0, 1]^s)$, което поражда Хилбертовото пространство $H_s(K)$ и произволна мрежа в единичния куб $[0, 1]^s$ средноквадратичната грешка на интегрирането в това пространство е равна на грешката на интегрирането в Хилбертовото пространство $H_s(K_{b-ds})$ определено от разрядно породеното ядро K_{b-ds} . Този резултат се използва в Теорема 5.2 за получаване на експлицитна формула за средноквадратичната грешка на интегрирането в $H_{Sob, s, \mu}$ в термините на функциите от системата Γ_b .

В заключение ще отбележа, че абстрахирайки се от някои несъществени технически грешки дисертацията е оформена добре и е написана на ясен и точен математически език. За получаване на резултатите в дисертацията докторантката е използвала разнообразен математически апарат и е преодоляла редица трудности от технически характер.

2. Най-важните резултати в дисертацията са включени в 4 научни статии, като две от тях са публикувани в специализираното списание с отворен достъп Uniform Distribution Theory, една в материалите на международната конференция ICT Innovations 2019/ Ohrid, North Macedonia, October 17-19, 2019 / и една статия е изпратена за публикуване. Една от публикуваните статии е самостоятелна, а другите две са съвместни с научния ръководител и V. Ristovska. Приемам, че приносът на Цветелина Петрова в тези статии е равностоен. Ре-

зултати в дисертацията са докладвани на споменатата по-горе международна конференция.

3. Авторефератът и авторската справка правилно отразяват основните резултати и научните приноси на дисертацията.

Заключение. Всичко казано по-горе показва, че представеният дисертационният труд отговаря на критериите и показателите за придобиването на научната и образователната степен "доктор" съгласно ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в ЮЗУ "Неофит Рилски". Това ми дава основание да препоръчам на членовете на почитаемото Научно Жури да гласуват "за" присъждането на образователната и научна степен "доктор" на Цветелина Николаева Петрова.

23.11.2021 г.

Подпис:



(акад. Олег Мушкарров)