

СТАНОВИЩЕ

от доц. д-р Васил Станков Грозданов

Относно: Съдържанието на дисертационен труд на тема „Квази-Монте Карло интегриране в хибридни Коробови и Соболеви пространства“ с автор докторант Цветелина Николаева Петрова

Предложената за рецензиране дисертация е написана в обем от 228 страници и в структурно отношение е организирана по следния начин: съдържа увод, пет глави и цитирана литература.

В увода са представени целите на дисертацията. Те имат една обща формулировка. След това обаче, във всяка една глава с резултати на докторантката, след щателен обзор на досега получените резултати от други автори, са формулирани конкретните задачи за решаване. По този начин общите цели на дисертацията са конкретизирани и представени чрез подходяща научна терминология. В увода е направено кратко описание на съдържанието на останалите глави на дисертацията.

Глава първа има спомагателен характер за дисертацията и не съдържа резултати на докторантката. В нея в подходящ обем и технически детайли са представени сведения за някои класи от пълни ортонормирани функционални системи, каквито са тригонометричната система, системата от Уолш функциите от ред b , мултипликативната система и b -ичната функционална система. Тези функционални системи, както и някои техни обобщения, са използвани като апарат за решаване на задачите, поставени в останалите глави на дисертацията.

Направен е кратък увод в теорията на равномерно разпределените редици, като тук основният акцент пада на интегралният критерий на Вайл и неговото следствие – експоненциалният критерий на Вайл. Специално място в първа глава заемат дефинициите на количествените характеристики за неравномерността на разпределението на редици, каквито са екстремалният дискрепанс, звезда-дискрепансът, квадратичният дискрепанс и различните типове на диафонията.

В тази глава на дисертацията е представена идеята на квази-Монте Карло интегриране в Хилбертови функционални пространства. В явен вид е дадена формулата за грешката в най-лошия случай на

интегрирането в Хилбертови пространства, генерирати от специални функции, наречени пораждащи ядра.

Глава втора на дисертацията е посветена на изледването на $(\text{Vil}_{\mathcal{B}_2}; \alpha; \gamma)$ -диафонията на мрежите от типа на Заремба-Холтън. В Параграф 2.2.1 е дадена концепцията на тегловата $(\text{Vil}_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)$ -диафония като количествена характеристика за неравномерността на разпределението на редици. В Параграф 2.2.2 като се използва \mathcal{B}_2 -ичната аритметика се въвежда един много широк клас от двумерни мрежи, конструирани в Канторови системи и които са мрежи от типа на оригиналната мрежа на Заремба-Холтън. Мрежата на Заремба-Холтън е въведена през 1969 г. и е една модификация на мрежата на Рот, дефинирана през 1954 г. Конструкцията на мрежа на Заремба-Холтън е съобразена с идеята да се получи двумерна мрежа с точен порядък на нейния квадратичен дискрепанс. В Дефиниция 2.7 е представен конструктивния принцип на двумерни мрежи, които са от типа на Заремба-Холтън, конструирана в \mathcal{B}_2 -ична система. В Параграф 2.2.3 са поставени за решаване на 4 задачи. В Параграф 2.3 са представени основните резултати на тази глава на дисертацията. Те са Теореме 2.1, 2.2 и 2.3. В Теореме 2.1 и 2.2 са представени оценки отгоре и отдолу на $(\text{Vil}_{\mathcal{B}_2}; \alpha; \gamma)$ – диафонията на произволна мрежа от класа $Z_V^{\kappa, \mu}$. оценките в тези две теореме са изключително прецизни и това дава възможност да се получат точните порядъци на $(\text{Vil}_{\mathcal{B}_2}; \alpha; \gamma)$ - диафонията на мрежите от типа на Заремба-Холтън. Тези точни порядъци са представени в Теорема 2.3. В последната теорема е показано и влиянието на вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ от експоненциални параметри върху тези точни порядъци. Доказателствата на Теоремите 2.1 и 2.2 се основат на точната стойност на тригонометричната сума на произволна мрежа от типа на Заремба-Холтън по отношение на Виленкин функциите. Тези точни стойности са представени в Лема 2.2. До края на тази глава са представени доказателствата на Теоремите 2.1, 2.2 и 2.3.

В глава трета на дисертацията са представени дефинициите и някои свойства на функциите от r -ичната и b -ичната функционални системи. Тези две функционални системи са въведени наскоро от австрийските математици Хелекалек и Нидеррайтер. В Параграф 3.1.2 са поставени за решаване 8 задачи. В Дефинициите 3.3 и 3.4 от докторантката са дефинирани функциите от функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. Те са едно естествено обобщение на конструктивния принцип на функциите от b -ичната функционална и представляват дефиниции на функции в Каторови системи. В Параграф 3.2.2 е развита теорията на \mathcal{B}_s

-ичната аритметика и са показани редица свойства на функциите от \mathcal{B}_s -ичната система, отнасящи се до тази аритметика. В Теорема 3.1 е показана пълнотата на функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. Това е принципно важен резултат за тази глава на дисертацията, тъй като на тази основа след това се развиват някои елементи на Фуриеровия анализ, основаващ се на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$.

В Дефиниция 3.7 докторантката въвежда концепцията на тегловата $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)$ -диафония. Нейната дефиниция се основава на използването на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. В Теорема 3.3 се узаконява факта, че така въведената теглова $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)$ -диафония е количествена характеристика за неравномерността на разпределението на редици от s -мерния единичен куб $[0, 1]^s$. В Теорема 3.4 е показана изчислителната сложност $\mathcal{O}(N^2)$ на тегловата $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)$ -диафония на произволна мрежа от N точки в $[0, 1]^s$.

В Параграф 3.6 е показано следващото приложение на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. В Дефиниция 3.10 се въвежда функционалния клас $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}, \alpha, \gamma}$. На практика чрез този клас се дава една нова скала за класификация на функциите, като критерият тук е скоростта на клонене към нула на коефициентите им на Фурие по отношение на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. В Лема 3.3 в явна форма се дава вида на пораждащото ядро на Хилбертовото пространство $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}, \alpha, \gamma}$. В Теорема 3.5 се дава точна формула за грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}, \alpha, \gamma}$. Тази грешка се представя в термините на пораждащото ядро на това пространство. Смятам, че това е един съвсем естествен резултат.

В Теорема 3.6 двете понятия - грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}, \alpha, \gamma}$ и $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)$ -диафонията на мрежата от възлите на интегрирането са свързани помежду си. Тази теорема на практика е една мотивировка и обяснява смисъла от въвеждането на $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)$ -диафонията и функционалното пространство $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s}, \alpha, \gamma}$. На практика, двете основни идеи на Глава 3 се пресичат в един съвсем естествен фокус, какъвто е Теорема 3.6.

В Глава 4 на дисертацията е показан вида на неравенството на Ердьош-Туран-Коксма за екстремалния дискрепанс и звезда-дискрепанса. В Параграф 4.1.2 са поставени за решаване две задачи. В Параграф 4.2 са представени редица предварителни резултати, отнасящи се до Фуриеровия анализ на локалния дискрепанс на произволна s -мерна мрежа. В Параграф 4.3 са представени основните

резултати на тази глава. В Теорема 4.6 и 4.7 са представени грубата и рафинираната форма на неравенството на Ердьош-Туран-Коксма. В тях респективно се дават оценки отгоре на екстремалния и звезда-дискрепанса на произволна s -мерна мрежа. Тук двата типа дискрепанси са оценени отгоре в термините на тригонометричната сума на мрежата по отношение на функциите от системата Γ_{B_s} . И в двата случая сумирането се осъществява над краен домейн. Като частни случаи от тези две теореми се получават резултати, получени по-рано от други автори.

Глава пета на дисертацията е посветена на изследването на средно квадратичната грешка на интегрирането в Соболеви пространства. В Параграф 5.1.3 е припомнен конструктивния принцип на функционалното пространство $H_{Sob.s,y}$, въведено от Слоан и Вожняковски. В Параграф 5.2 са поставени за решаване две задачи. В Теорема 5.1 средно квадратичната грешка на интегрирането в произволно Хилбертово пространство е представено като обикновена грешка на интегрирането в Хилбертово пространство, генерирано от разрядно промененото ядро. Това в някакъв смисъл е очакван резултат и представлява една адаптация на общата теория на интегрирането в Соболеви пространства, конкретно към използването на B_s -ичната аритметика. В Теорема 5.2 е представена точна формула за средно квадратичната грешка на интегрирането в пространството $H_{Sob.s,y}$ в термините на тригонометричната сума на мрежата от възлите на интегрирането по отношение на функциите от b -ичната система Γ_b .

Авторката на дисертацията има публикувани 3 статии – 1 в съавторство с научния и ръководител, 1 в съавторство с научния и ръководител и Весна Димитриевска-Ристовска и една самостоятелна статия. Има изпратена за рецензия и публикуване още една статия.

Авторефератът към дисертацията напълно съответства на съдържанието на дисертационния труд.

В резултат на това представяне на съдържанието на дисертацията могат да се направят следните **изводи**:

1. Докторантката успешно е навлязла в детайлите на теорията и практиката на равномерно разпределените редици и квази-Монте Карло интегрирането в Хилбертови пространства и има задълбочени познания в тези научни области;


2. В дисертацията са получени достатъчно по количество и като качество научни резултати, които представляват приноси на докторантката в теорията и практиката на равномерно разпределените редици и квази-Монте Карло интегрирането;

3. Дисертацията е организирана много прецизно. Първо са представени резултати на други автори, след това са формулирани за решаване конкретни задачи. Това дава възможност ясно и точно да се открие мястото на получените резултати в общия научен процес;

4. Дисертацията е много старателно оформена. Прави добро впечатление факта, че непосредствено след формулировката на задачите за решаване, са анонсирани техните решения, които са и основните резултати на дисертацията. Доказателствата им се основават на използването на редица предварителни резултати. Това допринася за успешното показване и реализиране на основните техники за доказване на представените резултати.

В заключение изказвам факта, че на финала по процедурата за защита на дисертационния труд ще гласувам с „ДА“.

05. 11. 2021 г.
Благоевград

Автор на становището: 
/Доц. д-р Васил Грозданов