СТАНОВИЩЕ

от доц. д-р Васил Станков Грозданов

Относно: Съдържанието на дисертационен труд на тема „Квази-Монте Карло интегриране в хибридни Коробови и Соболеви простравства" с автор докторант Цветелина Николаева Петрова

Предложената за рецензиране дисертация е написана в обем от 228 страници и в структурно отношение е организирана по следния начин: съдържа увод, пет глави и цитирана литература.

В увода са представени целите на дисертацията. Те имат една по-обща формулировка. След това обаче, във всяка една глава с резултати на докторантката, след щателен обзор на досега получените резултати от други автори, са формулирани конкретните задачи за решаване. По този начин общите цели на дисертацията са конкретизирани и представени чрез подходяща научна терминология. В увода е направено кратко описание на съдържанието на останалите глави на дисертацията.

Глава първа има спомагателен характер за дисертацията и не съдържа резултати на докторантката. В нея в подходящ обем и технически детайли са представени сведения за някои класи от пълни ортонормирани функционални системи, каквито са тригонометричната система, системата от Уолш функциите от ред b, мултипликативната система и b-ичната функционална система. Тези функционални системи, както и някои техни обобщения, са използвани като апарат за решаване на задачите, поставени в останалите глави на дисертацията.

Направен е кратък увод в теорията на раномерно разпределените редици, като тук основният акцент пада на интегралният критерий на Вайл и неговото следствие – експоненциалният критерий на Вайл. Специално място в първа глава заемат дефинициите на количествените характеристики за неравномерността на разпределението на редици, каквито са ектремалният дискрепанс, звезда-дискрепансът, квадратичният дискрепанс и различните типове на диафонията.

В тази глава на дисертацията е представена идеята на квази-Монте Карло интегриране в Хилбертови функционални пространства. В явен вид е дадена формулата за грешката в най-лошия случай на интегрирането в Хилбертови пространства, генерирати от специални функции, наречени пораждащи ядра.

Глава втора на дисертацията е посветена на изледването на $(Vil_{\mathcal{B}_2};\ \alpha;\ \gamma)$-диафонията на мрежите от типа на Заремба-Холтън. В Параграф 2.2.1 е дадена концепцията на тегловата $(Vil_{\mathcal{B}_s};\ \alpha;\ \gamma)$-диафония като количествена характеристика за неравномерността на разпределението на редици. В Параграф 2.2.2 като се използва $\mathcal{B}_2$-ичната аритметика се въвежда един много широк клас от двумерни мрежи, конструирани в Канторови системи и които са мрежи от типа на оригиналната мрежа на Заремба-Холтън. Мрежата на Заремба-Холтън е въведена през 1969 г. и е една модификация на мрежата на Рот, дефинирана през 1954 г. Конструкцията на мрежа на Заремба-Холтън е съобразена с идеята да се получи двумерна мрежа с точен порядък на нейния квадратичен дискрепанс. В Дефиниция 2.7 е представен конструктивния принцип на двумерни мрежи, които са от типа на Заремба-Холтън, конструирана в $\mathcal{B}_2$ - ичва система. В Параграф 2.2.3 са поставени за решаване на 4 задачи. В Параграф 2.3 са представени основните резултати на тази глава на дисертацията. Те са Теореми 2.1, 2.2 и 2.3. В Теореми 2.1 и 2.2 са представени оценки отгоре и отдолу на $(Vil_{\mathcal{B}_2};\ \alpha;\ \gamma)$ – диафонията на произволна мрежа от класа $Z_{\nu}^{\kappa,\mu}$. Оценките в тези две теореми са изключително прецизни и това дава възможност да се получат точните порядъци на $(Vil_{\mathcal{B}_2};\ \alpha;\ \gamma)$ - диафонията на мрежите от типа на Заремба-Холтън. Тези точни порядъци са представени в Теорема 2.3. В последната теорема е показано и влиянието на вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ от експоненциални параметри върху тези точни порядъци. Доказателствата на Теоремите 2.1 и 2.2 се основат на точната стойност на тригонометричната сума на произволна мрежа от типа на Заремба-Холтън по отношение на Виленкин функциите. Тези точни стойности са представени в Лема 2.2. До края на тази глава са представени доказателствата на Теоремите 2.1, 2.2 и 2.3.

В глава трета на дисертацията са представени дефинициите и някои свойства на функциите от p-ичната и b-ичната функционални системи.Тези две функционолни системи са въведени наскоро от австрийските математици Хелекалек и Нидеррайтер. В Параграф 3.1.2 са поставени за решаване 8 задачи. В Дефинициите 3.3 и 3.4 от докторантката са дефинирани функциите от функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. Те са едно естествено обобщение на конструктивния принцип на функциите от b-ичната функционална и представляват дефиниции на функции в Каторови ситеми. В Параграф 3.2.2 е развита теорията на $\mathcal{B}_s$

-ичната аритметика и са показани редица свойства на функциите от $\mathcal{B}_s$ -ичната система, отнасящи се до тази аритметика. В Теорема 3.1 е показана пълнотата на функционалната система $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$.Това е принципно важен резултат за тази глава на дисертацията, тъй като на тази основа след това се развиват някои елементи на фуриеровия анализ, основаващ се на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$

В Дефиниция 3.7 докторантката въвежда концепцията на тегловата $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)$-диафония. Нейната дефиниция се основава на използването на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. В Теорема 3.3 се узаконява факта, че така въведената теглова $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)$-диафония е количествена характеристика за неравномерността на разпределението на редици от s-мерния единичен куб $[0, 1)^s$. В Теорема 3.4 е показана изчислителната сложност $O(N^2)$ на тегловата $(\Gamma_{\boldsymbol{b}}; \alpha; \gamma)$-диафония на произволна мрежа от N точки в $[0, 1)^s$.

В Параграф 3.6 е показано следващото приложение на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. В Дефиниицця 3.10 се въвежда функционалния клас $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$. На практика чрез този клас се дава една нова скала за класификация на функциите, като критерият тук е скоростта на клонене към нула на коефициентите им на Фурие по отношение на функциите от системата $\Gamma_{\mathcal{B}_s}$. В Лема 3.3 в явна форма се дава вида на пораждащото ядро на Хилбертовото пространство $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$. В Теорема 3.5 се дава точна формула за грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$. Тази грешка се представя в термините на пораждащото ядро на това пространство. Смятам, че това е един съвсем естествен резултат.

В Терема 3.6 двете понятия - грешката в най-лошия случай на интегрирането в пространството $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$ и $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)$-диафонията на мрежата от възлите на интегрирането са свързани помежду си. Тази теорема на практика е една мотивировка и обяснява смисъла от въвеждането на $(\Gamma_{\mathcal{B}_s}; \alpha; \gamma)$-диафонията и функционалното пространство $H_{\Gamma_{\mathcal{B}_s},\alpha,\gamma}$. На практика, двете основни идеи на Глава 3 се пресичат в един съвсем естествен фокус, какъвто е Терема 3.6.

В Глава 4 на дисертацията е показан вида на неравенството на Ердьош-Туран-Коксма за екстремалния дискрепанс и звезда-дискрепанса. В Параграф 4.1.2 са поставени за решаване две задачи. .В Параграф 4.2 са представени редица предварителни резултати, отнасящи се до Фуриеровия анализ на локалния дискрепанс на произволна s-мерна мрежа. В Параграф 4.3 са представени основните